

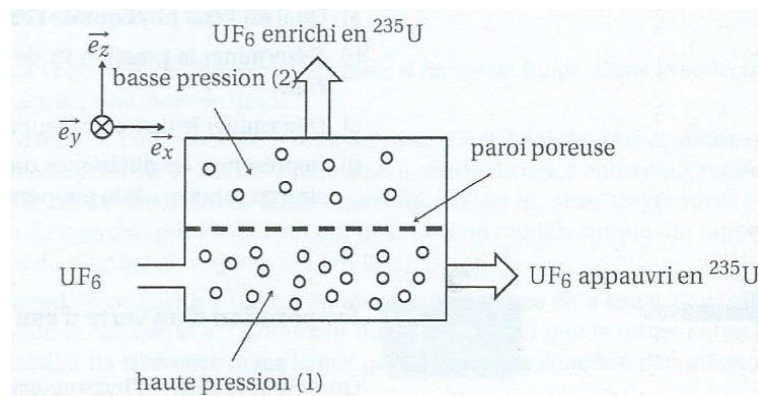
Durée de l'épreuve : 3h

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Problème 1: Principe de la séparation isotopique par effusion gazeuse

75 % de l'énergie électrique consommée en France provient de réacteurs nucléaires dont 90 % utilisent comme combustible l'oxyde d'uranium UO_2 dont la teneur en uranium 235 doit atteindre un seuil de 4 %. En proportion insuffisante dans l'uranium naturel, il convient d'enrichir cet uranium en isotope 235. L'enrichissement par effusion gazeuse est le premier procédé industriel de séparation isotopique. Ce procédé met à profit la faible différence de masse des isotopes de l'hexafluorure d'uranium UF_6 pour séparer sélectivement les molécules par passage au travers d'une paroi poreuse.

Le diffuseur est constitué de deux compartiments de même volume V maintenus à la température T . Le compartiment (1) contient N molécules d'un gaz parfait alors que le compartiment (2) est vide. A l'instant initial, un très petit orifice de surface S est percé entre les deux compartiments permettant ainsi le passage du gaz entre les compartiments (1) et (2) : c'est le phénomène d'effusion gazeuse.



L'espace est rapporté au trièdre direct $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ avec $\vec{e}_z$ normal au trou orienté vers le compartiment (2). On note $N_1(t)$ et $N_2(t)$ le nombre de molécules dans les compartiments (1) et (2) à l'instant t . On adopte le modèle simplifié suivant : le trou est petit, le gaz se détend lentement en restant au repos donc tout mouvement macroscopique est négligé, la répartition des molécules est uniforme dans les deux compartiments, les vitesses des molécules ne sont orientées que selon $\pm \vec{e}_x$, $\pm \vec{e}_y$ et $\pm \vec{e}_z$ avec une norme identique égale à la vitesse quadratique moyenne notée u (ou v^*).

1) On note $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ la constante des gaz parfaits et M la masse molaire du gaz. Donner l'expression de la vitesse quadratique moyenne u en fonction de M , R et T .

2) On fait l'hypothèse que la distribution des vitesses est isotrope et que seule $\frac{1}{6}$ des molécules se dirige selon $+\vec{e}_z$ avec une vitesse $v_z = u > 0$. Exprimer le nombre $dN_{1 \rightarrow 2}$ de molécules du compartiment (1) traversant la surface S vers le compartiment (2) pendant une durée dt . Exprimer le nombre $dN_{2 \rightarrow 1}$ de molécules du compartiment (2) traversant la surface S vers le compartiment (1) pendant la même durée dt . En déduire $\frac{dN_{1 \rightarrow 2}}{dt}$ et $\frac{dN_{2 \rightarrow 1}}{dt}$ en fonction de $N_1(t)$, $N_2(t)$, S , u et V .

3) Etablir que l'équation différentielle vérifiée par $N_1(t)$ s'écrit : $\frac{dN_1}{dt} + \frac{S \cdot u}{3 \cdot V} N_1 = \frac{S \cdot u}{6 \cdot V} N$

4) Etablir les expressions de $N_1(t)$ et $N_2(t)$ en fonction du nombre N de molécules et d'une constante de temps τ caractéristique du phénomène d'effusion observé.

5) Calculer τ sachant que l'effusion s'effectue à 403 K à travers un pore cylindrique de rayon $r = 0,0100 \mu\text{m}$ et que chaque compartiment possède un volume $V = 32,0 \text{ L}$. Le gaz utilisé a pour masse molaire $M = 352 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$. Conclure.

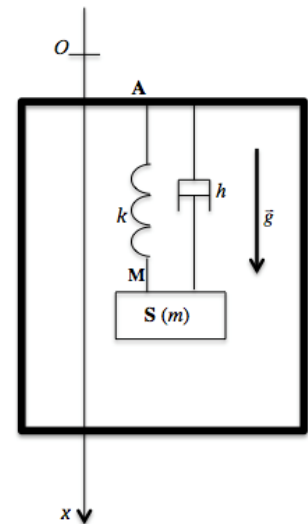
- 6) On note ϕ le nombre de particules traversant l'orifice de surface S en une seconde et $n^* = \frac{N}{V}$ la densité moléculaire. Montrer que $\phi = \frac{n^* S}{6} \sqrt{\frac{3.R.T}{M}}$.
- 7) A l'instant initial, le compartiment (1) contient deux gaz $U^{235}F_6$ et $U^{238}F_6$ de masses molaires M_5 et M_8 et de densité moléculaires n_5^* et n_8^* . Dans la suite, les grandeurs associées à ces deux gaz seront indicées respectivement par 5 et 8. On donne $M_5 = 349 \text{ g.mol}^{-1}$ et $M_8 = 352 \text{ g.mol}^{-1}$. Calculer le rapport des temps d'effusion $\frac{\tau_8}{\tau_5}$.
- 8) Commenter ce résultat en expliquant brièvement comment il est possible d'enrichir en $U^{235}F_6$ un mélange de $U^{235}F_6$ et $U^{238}F_6$ par effusion gazeuse.
- 9) Le taux d'enrichissement η_e en isotope 235 se définit comme le rapport des coefficients de richesse dans le gaz diffusé $R_d = \frac{\phi_5}{\phi_8}$ et dans le gaz initial $R_0 = \frac{n_5^*}{n_8^*}$. Exprimer ce rapport $\eta_e = \frac{R_d}{R_0}$ en fonction de M_5 et de M_8 . Calculer η_e .
- 10) Une cascade est réalisée en plaçant p étages d'enrichissement en série, le gaz enrichi de l'étage k alimentant l'entrée de l'étage $k + 1$. Déterminer le nombre p de passages nécessaires à travers les parois poreuses pour arriver à la proportion finale de 4,0 % en isotope 235 partant d'un titre initial de 0,71 %. On supposera que η_e est le taux d'enrichissement de chaque étage.

Problème 2 : Principe d'un sismographe

Les séismes donnent naissance à différents types d'ondes sismiques, provoquant à la fois des déplacements horizontaux et des déplacements verticaux du sol. On étudie dans cet exercice le fonctionnement d'un sismographe destiné à enregistrer les vibrations verticales générées par un séisme.

On considère le dispositif schématisé sur la figure ci-contre modélisant un sismographe vertical. A l'intérieur d'un boîtier (B) reposant au sol, un solide S assimilable à un point matériel de masse m est suspendu à un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 . On note A l'extrémité du ressort fixée au boîtier et M l'autre extrémité reliée à S . Un système d'amortissement électromagnétique réglable exerce d'autre part sur S une force de "frottement" $\vec{F}_f = -h\vec{V}$, où $\vec{V}$ est la vitesse de S par rapport au boîtier et h une constante positive. Un capteur permet d'enregistrer les déplacements de S relativement à (B).

Données numériques : $k = 9,5 \cdot 10^2 \text{ N.m}^{-1}$, $m = 12 \text{ kg}$ et $g = 9,8 \text{ m.s}^{-1}$



Oscillations libres

Dans cette partie, l'appareil n'est soumis à aucune onde sismique et le boîtier (B) est immobile dans le référentiel terrestre (R) supposé galiléen.

1. Exprimer la longueur du ressort à l'équilibre notée l_e en fonction de l_0 , m , g et k .

2. Le solide S après avoir été écarté de sa position d'équilibre est mis en mouvement par rapport au boîtier.

On note $x = AM - l_e$, l'abscisse du point M comptée à partir de sa position d'équilibre sur un axe vertical descendant solidaire de (B).

2.1. Montrer que le mouvement du solide obéit à une équation différentielle qui peut se mettre sous la forme :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 \cdot x = 0$$

et donner les expressions de la pulsation propre ω_0 et du facteur de qualité Q de cet oscillateur à l'aide de k , m et h .

2.2. Avec les valeurs fournies, calculer numériquement ω_0 et la période propre T_0 des oscillations non amorties.

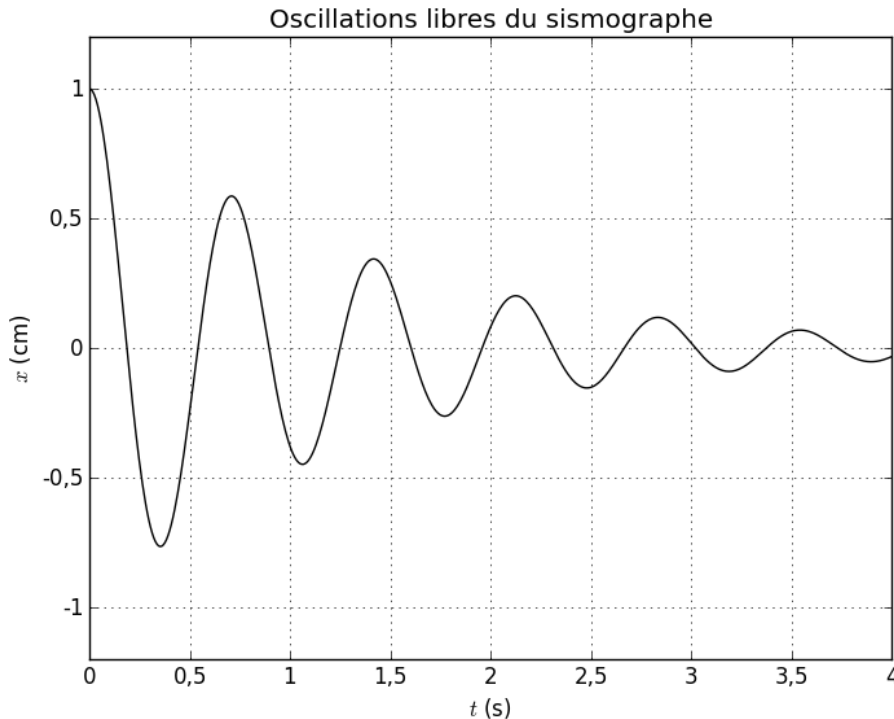
3. Le système d'amortissement a été réglé de telle sorte que le régime libre soit un mouvement pseudopériodique donné par :

$$x(t) = X_m \cdot e^{-\lambda \cdot t} \cdot \cos(\Omega \cdot t + \psi)$$

3.1. Déterminer les expressions de λ et de la pseudo pulsation Ω en fonction de ω_0 et Q .

3.2. L'enregistrement des variations de x en fonction du temps est reproduit ci-dessous. Déterminer grâce à cet enregistrement la pseudopériode T des oscillations de S .

Comparer la valeur obtenue à la période propre calculée question 2.2 et commenter.



4. On rappelle la définition du décrément logarithmique :

$$\delta = \ln \left(\frac{x(t)}{x(t+T)} \right) = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{x(t)}{x(t+n \cdot T)} \right)$$

avec n entier positif quelconque.

4.1. Exprimer δ en fonction de λ et T , puis en fonction de Q exclusivement.

4.2. Déterminer la valeur de δ à partir de l'enregistrement puis celle du facteur de qualité Q . En déduire la valeur à laquelle a été réglée le coefficient h .

5.1. Si l'on veut régler l'amortissement à sa valeur critique, quelle valeur faut-il donner à Q ?

Exprimer en fonction de m et k la valeur de h correspondant à ce régime et effectuer l'application numérique.

5.2. Quel intérêt présente le régime critique ?

Oscillations forcées

Le boîtier, soumis à une onde sismique, est maintenant animé d'un mouvement de translation verticale. En l'absence d'onde sismique l'extrémité A du ressort est située au point A_0 lié au référentiel galiléen (R). On note $y = \overline{A_0 A}$ le déplacement selon la verticale du point A , par rapport à sa position au repos.

6.1. Exprimer le vecteur position $\overrightarrow{A_0 M}$ en fonction de l_e , x , y et du vecteur unitaire $\vec{u}_x$ de Ox . En déduire le vecteur accélération de S relativement à (R).

6.2. En traduisant les lois de la mécanique dans (R), montrer que le mouvement de S est maintenant décrit par l'équation différentielle :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 \cdot x = -\frac{d^2y}{dt^2}$$

7. On suppose une onde sismique sinusoïdale donnée par une loi de la forme $y(t) = Y_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$. Après un régime transitoire il s'établit un régime sinusoïdal forcé de la forme $x(t) = X_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$.

7.1. On introduit les représentations complexes : $\underline{y}(t) = Y_0 \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}$ et $\underline{x}(t) = X_0 \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot t + \varphi)}$. Traduire l'équation différentielle précédente en formalisme complexe et déterminer la fonction de transfert du dispositif définie par :

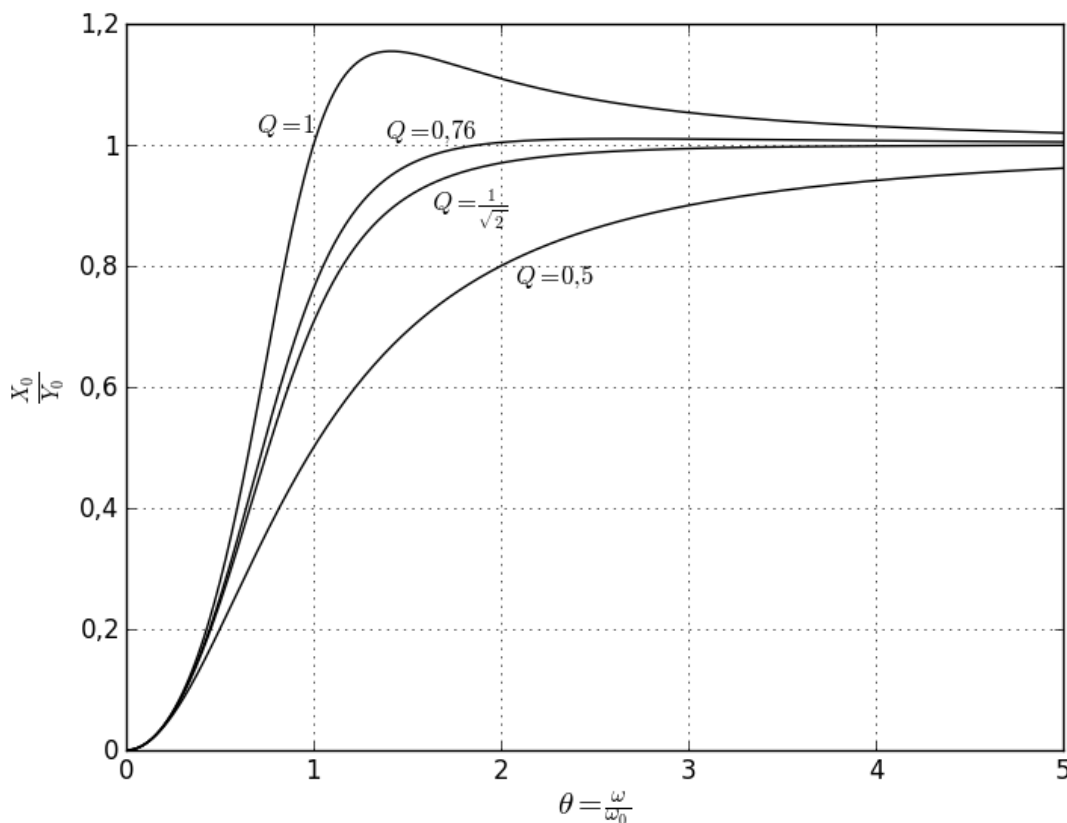
$$\underline{H} = \frac{\underline{x}(t)}{\underline{y}(t)}$$

7.2. Exprimer $\underline{H}$ en fonction de Q et de la pulsation réduite $\theta = \frac{\omega}{\omega_0}$. En déduire l'expression de $H = |\underline{H}| = \frac{X_0}{Y_0}$ en fonction de θ et Q .

7.3. La fonction H admet-elle un maximum ? Justifier.

7.4. Si oui, établissez l'expression de H_{max} ainsi que la fréquence pour laquelle ce maximum est observé.

8. La figure ci-dessous reproduit les variations de $\frac{X_0}{Y_0}$ en fonction de θ pour différentes valeurs de Q .



8.1. Vérifier la cohérence de l'allure de ce graphe avec l'expression obtenue à la question précédente.

8.2. Dans quel domaine doit se situer la pulsation ω si l'on désire que l'amplitude X_0 des oscillations de S reproduise fidèlement l'amplitude des vibrations du boîtier ? Est-il souhaitable que ce sismographe présente un phénomène de résonance ?

8.3. On tolère un écart relatif de 5 % entre X_0 et Y_0 . Parmi ces valeurs de Q , quelle est celle pour laquelle la bande de pulsation où ce critère est vérifié est la plus large ?

En supposant que Q est réglé à cette valeur, déterminer numériquement à l'aide du graphe la valeur minimale de la fréquence des ondes sismiques pour lesquelles ce sismographe est adapté ?

Problème 3: Trains à sustentation électromagnétique

Un train à sustentation magnétique utilise les forces magnétiques pour léviter au-dessus de la voie ; il n'est donc pas en contact avec les rails, contrairement aux trains classiques. Ce procédé permet de supprimer la résistance au roulement et d'atteindre des vitesses élevées.

Il existe actuellement deux types de trains à grande vitesse à sustentation magnétique :

- Un train à sustentation électromagnétique dans lequel le train lévite par attraction grâce à des aimants (Transrapid développé en Allemagne)
- Un train à sustentation électromagnétique dans lequel le train lévite par répulsion grâce aux courants de Foucault induits par le déplacement du train (SCMaglev au Japon)

La seule réalisation commerciale du Transrapid est à l'heure actuelle la ligne de 30 kilomètres qui fonctionne depuis 2004 entre Shanghai et son aéroport international de Pudong. Sur ce parcours le train atteint la vitesse de 430 km/h.

La première version commerciale du SCMaglev doit relier en une heure Tokyo et Osaka, distantes de 400 km à vol d'oiseau. L'ouverture du premier tronçon de la ligne (Tokyo-Nagoya) est prévu en 2027 avec une vitesse de pointe sur le parcours de 505 km/h.

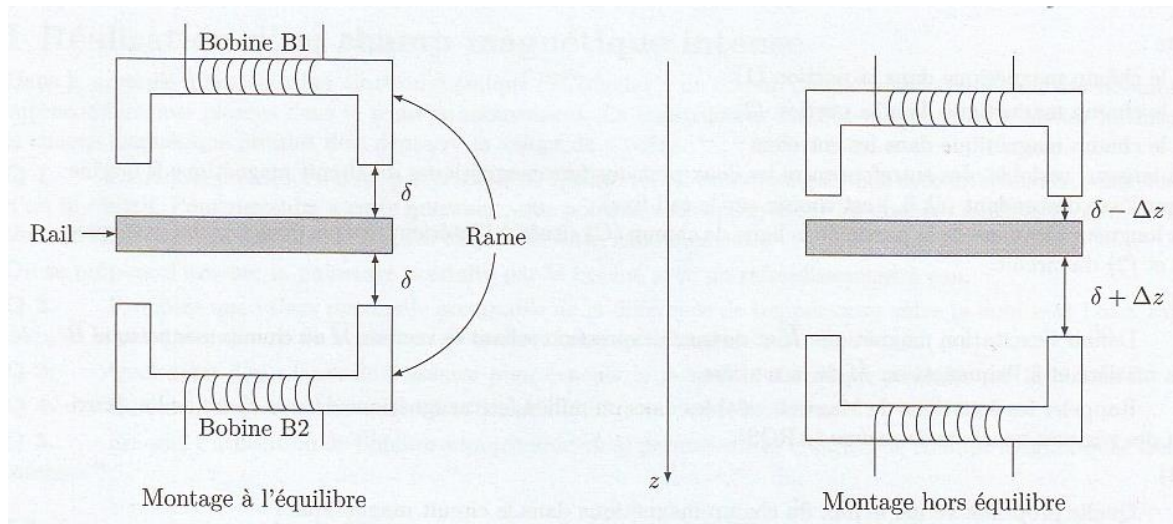


SCMaglev

L'instabilité de la rame en sustentation nécessite l'asservissement en position de l'entrefer. Cet asservissement est réalisé en utilisant un capteur de position. Dans ce problème, nous étudions le principe d'un capteur de position à inductance variable.

A. Capteur à entrefer variable « push-pull »

La figure ci-dessous décrit le schéma de principe d'un capteur inductif à entrefer variable dans un montage « push-pull ». Le capteur comprend un circuit magnétique composé d'un noyau solidaire du rail fixe et de deux bobines B_1 et B_2 sur deux noyaux ferromagnétiques en vis-à-vis, solidaires de la rame. Les bobines B_1 et B_2 du capteur sont identiques et placées de façon symétrique par rapport au rail lorsque la rame est à l'équilibre (figure de gauche). Ces bobines B_1 et B_2 sont indépendantes des bobines assurant la lévitation. Elles sont constituées de N_c spires de surface S .



Lorsque la rame est à l'équilibre, l'inductance des bobines B_1 et B_2 s'écrit : $L_e = \frac{\mu_0 \cdot N_c^2 \cdot S}{2 \cdot \delta}$ où $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ est la perméabilité magnétique du vide. On envisage une variation Δz de la position du train par rapport à la position d'équilibre $z_e = \delta$ (figure de droite), en considérant que $\Delta z \ll \delta$. Dans ce cas, les inductances des deux bobines deviennent :

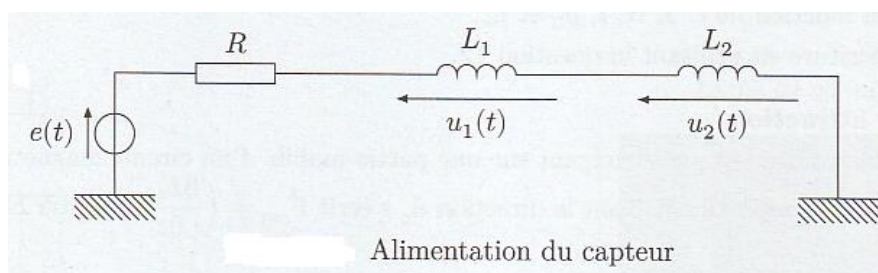
$$L_1 = \frac{\mu_0 \cdot N_c^2 \cdot S}{2 \cdot (\delta - \Delta z)} \quad \text{et} \quad L_2 = \frac{\mu_0 \cdot N_c^2 \cdot S}{2 \cdot (\delta + \Delta z)}$$

1) Exprimer les inductances L_1 et L_2 de chacune des bobines B_1 et B_2 en fonction de L_e , Δz et δ en se limitant au premier ordre en $\Delta z/\delta$.

Donnée : Pour $x \ll 1$: $(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha \cdot x + 0 \cdot (x^2)$

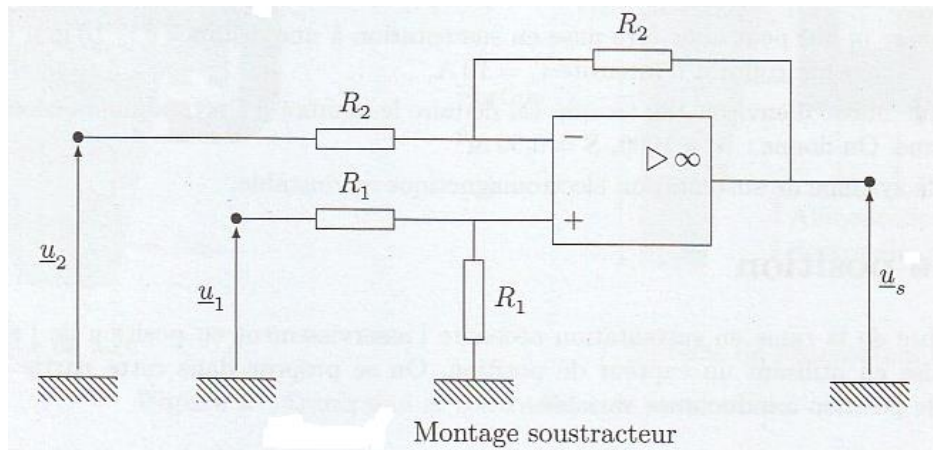
B. Mesure des variations d'inductance

Les bobines B_1 et B_2 sont alimentées par un générateur délivrant une tension électrique $e(t) = E \cdot \cos(\omega \cdot t)$, de pulsation ω , en série avec une résistance R (cf figure ci-dessous). On néglige les résistances des deux bobines.



1) Déterminer les expressions des tensions électriques complexes $\underline{u}_1$ et $\underline{u}_2$ en fonction de R , L_1 , L_2 , ω et $\underline{e}$.

Ces tensions sont placées à l'entrée du montage présenté sur la figure ci-dessous. L'ALI est supposé idéal en fonctionnement linéaire.



- 2) Rappeler les caractéristiques d'un ALI idéal en fonctionnement linéaire et leurs conséquences.
- 3) Montrer que la tension électrique de sortie du montage est $u_s = u_1 - u_2$.
- 4) Etablir la fonction de transfert complexe $\underline{H}(j.\omega) = \frac{u_s}{e}$ et la mettre sous la forme :

$$\underline{H}(j.\omega) = H_0 \cdot \left(\frac{j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}} \right)$$

où H_0 et ω_0 sont des fonctions de $L_e, R, \Delta z$ et δ que l'on déterminera.

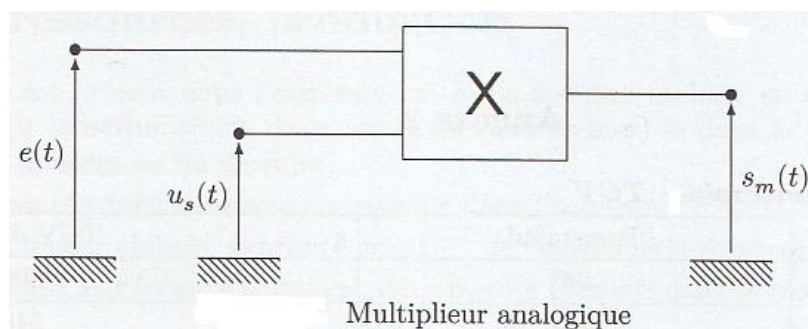
- 5) Tracer les diagrammes de Bode asymptotiques en gain et en phase de $\underline{H}(j.\omega)$.
 - 6) De quel type de filtre s'agit-il ?
 - 7) Quelle est la signification de la pulsation ω_0 ?
 - 8) Dans quelle gamme de fréquences doit-on travailler pour que $\underline{H}(j.\omega)$ soit indépendant de ω et proportionnel au déplacement de la rame ?
- On a $R = 750 \Omega$, $L_e = 60,0 \text{ mH}$ et une fréquence d'utilisation $f = 4,00 \text{ kHz}$.
- 9) Montrer que le signal de sortie peut se mettre sous la forme :

$$u_s(t) = \frac{E \Delta z}{\delta} \cos(\omega.t + \varphi)$$

- 10) Exprimer et calculer le déphasage φ .

C. Electronique et conditionnement

On souhaite obtenir un signal continu image de la position z de la rame. On utilise pour cela un multiplieur analogique, avec une constante de multiplication K_m dans le montage ci-dessous :



- 1) Exprimer la tension électrique $s_m(t)$ en fonction de K_m , $e(t)$ et $u_s(t)$ à la sortie du multiplieur et donner sa décomposition spectrale. Préciser le terme représentatif de la position z de la rame.

- 2) Proposer un montage à placer à la sortie du multiplieur qui permette de récupérer la tension continue S_m proportionnelle au déplacement Δz ? Préciser la nature et les caractéristiques de ce montage.
- 3) Exprimer la sensibilité du capteur définie par $\Delta S_m / \Delta z$.
- 4) Application numérique : le capteur permet de mesure la tension de sortie à 10,0 mV près. En déduire le plus petit écart relatif mesurable par rapport à la position d'équilibre. On prendra $E = 6,00 \text{ V}$ et $K_m = 1,00 \text{ V}^{-1}$.