

Devoir surveillé n° 7 (Sujet B)

Thermodynamique

- La durée de l'épreuve est de 4 heures. Les étudiants ne sont pas autorisés à sortir avant la fin du temps prévu.
- L'usage de la calculatrice est autorisé.
- Les numéros de questions et les résultats doivent ressortir de votre copie.
- Toute application numérique ne comportant pas d'unité sera considérée comme fausse.
- Les résultats littéraux non homogènes entraîneront la perte de tous les points de la question.
- Si au cours de l'épreuve vous repérez ce qui semble être une erreur d'énoncé, vous le signalerez sur votre copie et poursuivrez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.

Problème 1 Étude d'un autocuiseur

L'autocuiseur (photo ci-dessous), couramment appelé « cocotte-minute », a été inventé en 1679 par le français Denis Papin.



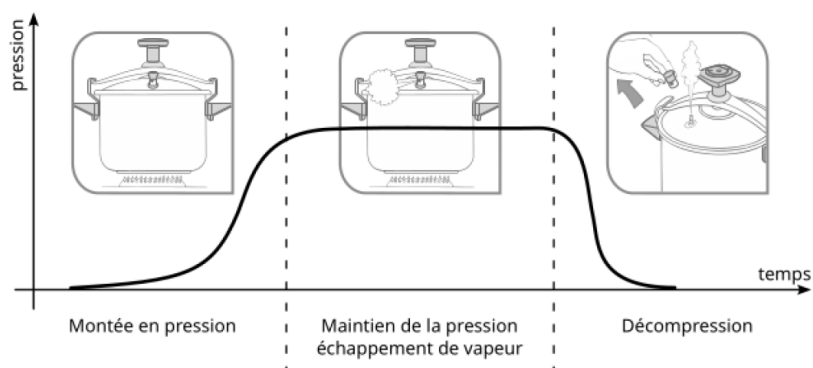
Il s'agit d'un dispositif de cuisson des aliments sous une pression supérieure à la pression atmosphérique.

L'augmentation de pression s'accompagne d'une augmentation de la température maximale atteinte, ce qui accélère la cuisson des aliments.

Une soupape permet de limiter la pression intérieure en évacuant la vapeur d'eau formée et assure une cuisson à température constante.

L'autocuiseur contient toujours un peu d'eau en plus des aliments à cuire. La cuisson se déroule alors en trois étapes :

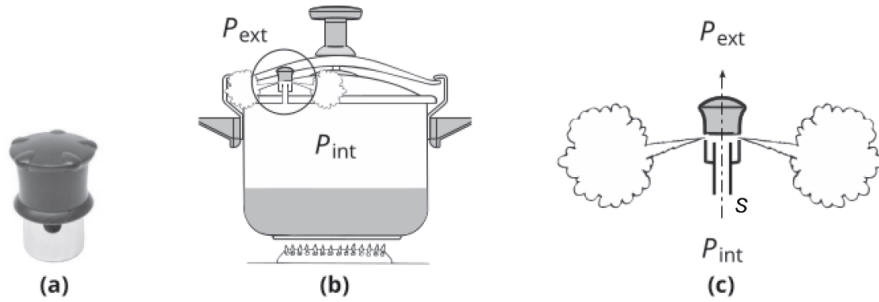
- un régime transitoire de montée en pression (et en température) du contenu de l'autocuiseur ;
- un régime de cuisson durant lequel la pression et la température de la vapeur d'eau restent constantes ;
- une décompression, souvent rapide, pour arrêter la cuisson.



A La soupape

La soupape d'échappement de la vapeur est un cylindre de masse m placé sur le couvercle de l'autocuiseur.

Elle peut coulisser verticalement sans frottement sur un cylindre creux qui fait communiquer l'intérieur de l'autocuiseur avec l'extérieur (figure ci-dessous).



Lorsque la pression augmente dans l'autocuiseur, la soupape monte, ce qui permet à la vapeur de s'échapper. En régime permanent, la soupape reste à hauteur constante (schéma (c)) et est en équilibre sous l'effet de son poids et des forces de pression.

La pression extérieure vaut $P_{\text{ext}} = 1,01 \times 10^5 \text{ Pa}$. On note P_{int} la pression à l'intérieur de l'autocuiseur.

La soupape est pesée sur une balance de cuisine (schéma (a)) ci-dessous dont un extrait de la notice est donné (b).



(a)

Caractéristiques particulières

- Gamme de pesée : 10 g à 5 kg, avec une précision de mesure de l'ordre de 1 gramme.

(b)

A.1 En tenant compte de l'indication de précision mentionnée par la notice de la balance, écrire la valeur numérique de la masse m de la soupape. L'évaluation de son incertitude-type associée serait-elle de type A ou de type B ?

Aucun calcul d'incertitude n'est demandé par la suite.

Équilibre de pression La section du conduit cylindrique d'évacuation de la vapeur vaut $S = 7,00 \text{ mm}^2$. Des indications de pression et le volume de l'autocuiseur sont gravés sur celui-ci.



On note : $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ la valeur du champ de pesanteur.

A.2 Représenter, à l'équilibre, la soupape et les trois forces qui s'exercent sur elle.

A.3 Déterminer l'expression littérale de P_{int} en fonction de P_{ext} , m , g et S . Déterminer la valeur numérique de P_{int} .

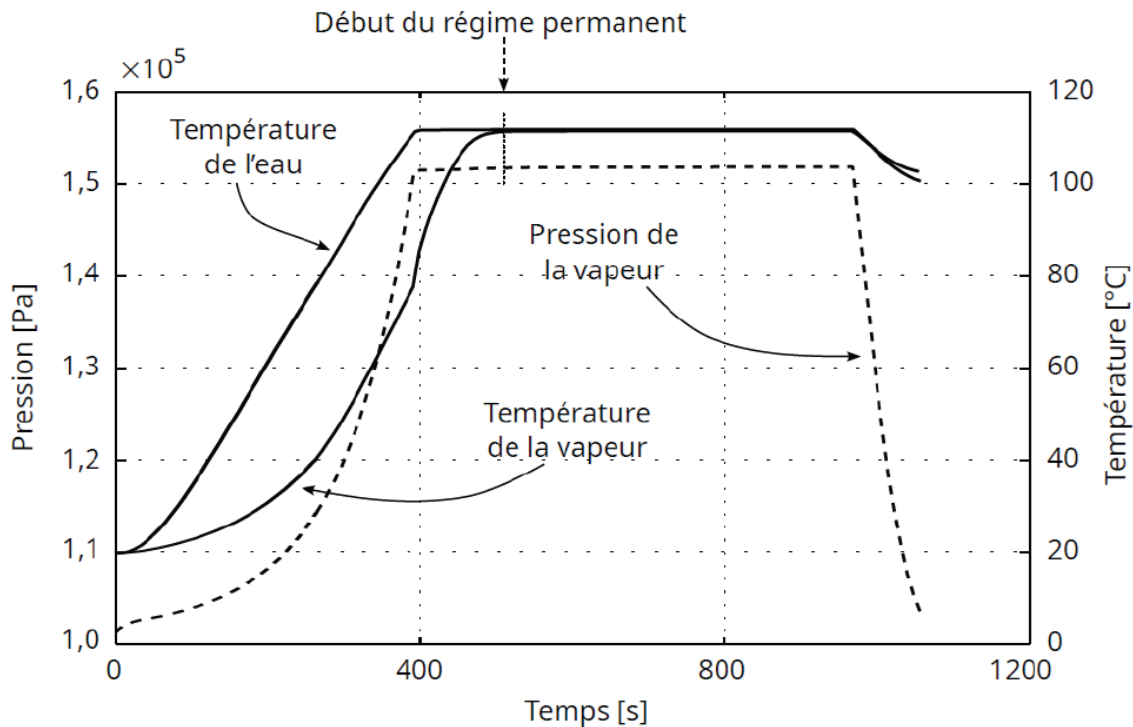
A.4 L'une des indications gravées sur l'autocuiseur permet-elle de confirmer ce résultat ?

À quoi correspond vraisemblablement l'autre indication de pression ?

B Mesures dans l'autocuiseur et exploitation

On verse un volume $V_e = 1,00 \text{ L}$ d'eau dans l'autocuiseur que l'on ferme et que l'on place sur une plaque chauffante délivrant la puissance thermique : $P_{\text{th}} = 1,50 \text{ kW}$.

Des capteurs permettent d'enregistrer la température de l'eau, la température de la phase vapeur ainsi que la pression de la phase vapeur.



On note :

- m_e la masse de l'eau,
- $c_e = 4,18 \text{ kJ K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$ la capacité thermique massique de l'eau,
- $C_a = 1,23 \text{ kJ K}^{-1}$ la capacité thermique de l'autocuiseur.

L'eau et l'autocuiseur sont constamment à la même température et on note T_i leur température initiale.

Premier modèle Dans un premier temps, on suppose que toute la puissance thermique P_{th} est transférée à l'autocuiseur et à l'eau.

B.1 Relever sur la figure ci-dessus la température initiale T_i .

B.2 On note Δt la durée au bout de laquelle l'eau et l'autocuiseur atteignent la température $T_f = 100^\circ\text{C}$. Déterminer l'expression littérale de la durée Δt en fonction de m_e , c_e , C_a , T_f , T_i et de P_{th} . Déterminer la valeur numérique de Δt .

B.3 Cette durée est-elle compatible avec les données de la figure ci-dessus ? Si non, donner deux arguments permettant de justifier cet écart.

Second modèle Dans un second temps, on tient compte des pertes thermiques de l'autocuiseur vers son environnement au cours du temps sous la forme d'une puissance thermique de fuite :

$$P_f(t) = k(T(t) - T_{\text{ext}})$$

où k et T_{ext} sont des constantes.

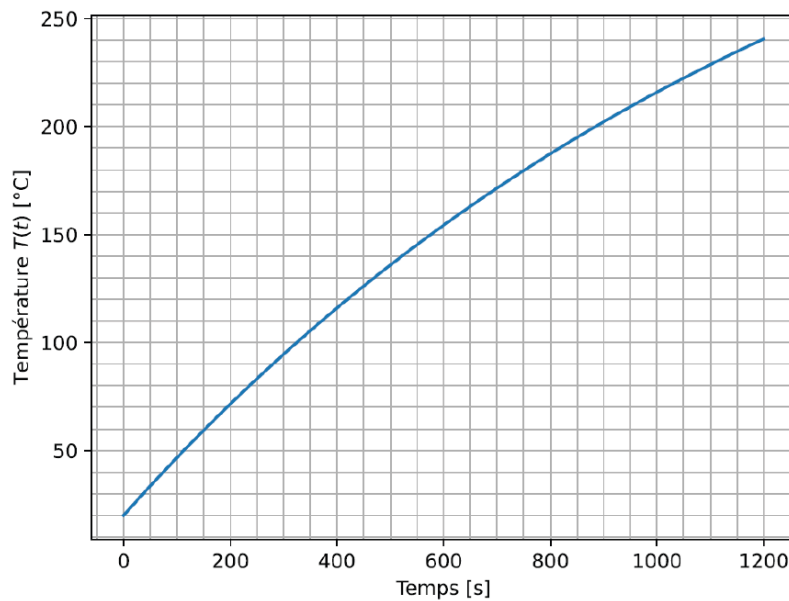
B.4 En effectuant un bilan thermique sur le système {eau + autocuiseur} pendant l'intervalle de temps infinitésimal dt , montrer que la température du système satisfait l'équation différentielle :

$$\frac{dT}{dt} + \frac{1}{\tau} (T(t) - T_{\text{ext}}) = \frac{1}{\tau} \frac{P_{\text{th}}}{k}$$

et déterminer l'expression de τ en fonction de m_e , c_e , C_a et k .

B.5 On cherche une solution de l'équation précédente sous la forme : $T(t) = A + B \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$. Déterminer les expressions littérales de A et de B en fonction des paramètres de l'équation de la question précédente.

Le tracé de cette solution est présenté sur la figure ci-dessous.



B.6 Déduire de cette figure la durée $\Delta t'$ nécessaire pour atteindre la température $T_f = 100^\circ\text{C}$. Le résultat est-il cohérent avec la durée Δt trouvée précédemment ? Justifier. Le résultat est-il satisfaisant ? Justifier.

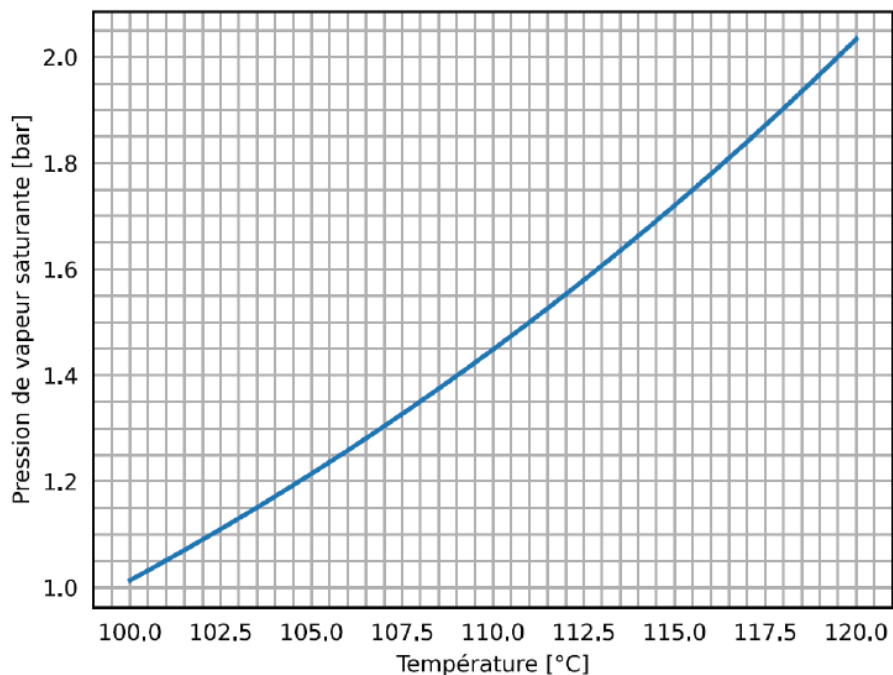
C Augmentation de la vitesse de cuisson

On observe sur la figure du début de la partie B qu'au-delà de 500 s, le régime permanent de cuisson est atteint. On note T_p la température de cuisson et P_p la pression de cuisson en régime permanent.

C.1 Relever sur cette figure la température de cuisson T_p et la pression de cuisson P_p en régime permanent.

C.2 Justifier à l'aide d'un diagramme, la raison thermodynamique pour laquelle la température et la pression sont devenues constantes.

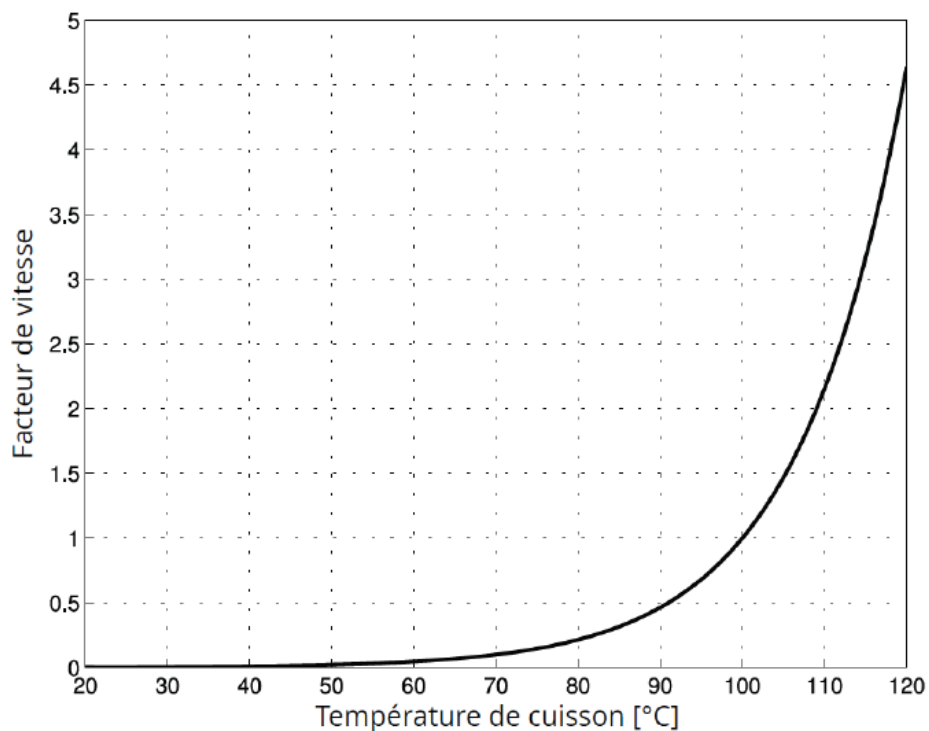
La pression de vapeur saturante de l'eau dépend de la température, comme le montre la figure ci-dessous.



C.3 Reproduire cette courbe sur votre copie en y positionnant :

- le point de cuisson en régime permanent dans un autocuiseur (T_p, P_p) ;
- le point de cuisson à ébullition sous pression ambiante (T_a, P_a).

La figure ci-dessous donne le facteur de vitesse de la cuisson en fonction de la température de cuisson. La référence est prise à 100 °C. Par exemple, une cuisson à 80 °C a un facteur de cuisson de 0,25 et est donc quatre fois plus lente qu'à 100 °C.



C.4 Sachant que la cuisson de légumes dans une casserole d'eau bouillante à l'air libre s'est faite en 20,0 minutes, estimer la durée nécessaire à la cuisson de la même quantité de légumes dans un autocuiseur.

C.5 On se place à une altitude telle que la pression vaut 0,70 bar et l'eau bout à 90 °C. En expliquant la démarche suivie et en précisant quelles informations du sujet ont été utilisées (formules, données, figures, ...), estimer la température d'ébullition de l'eau dans l'autocuiseur à cette altitude. Conclure quant à l'intérêt de l'utilisation d'un autocuiseur en altitude.

D Estimation du débit de vapeur

Lorsque l'autocuiseur fonctionne en régime permanent, la puissance thermique de la plaque chauffante est réduite à : $P_{\text{th}} = 600 \text{ W}$. Un jet de vapeur d'eau s'échappe continûment par la soupape.

La puissance fournie par la plaque chauffante sert en partie à vaporiser l'eau présente dans l'autocuiseur et est en partie perdue, les pertes étant de l'ordre de $P_f = 350 \text{ W}$.

On admet que la quantité d'eau vaporisée pendant la cuisson reste suffisamment faible pour considérer le volume d'eau liquide présent dans l'autocuiseur comme constant et égal à $V_e = 1,00 \text{ L}$ (hypothèse \mathcal{H}).

On suppose que le gaz présent dans l'autocuiseur est uniquement constitué de vapeur d'eau. Dans les conditions de cuisson, l'enthalpie massique de vaporisation de l'eau vaut $\Delta h_{\text{vap}} = 2,23 \text{ MJ kg}^{-1}$.

D.1 Expliquer pourquoi il apparaît des gouttelettes d'eau liquide dans le jet de vapeur à sa sortie par la soupape.

D.2 Déterminer, à l'aide d'un bilan enthalpique, le débit massique du jet de vapeur d'eau en mg s^{-1} .

D.3 En déduire la masse d'eau perdue dans le jet pour une cuisson de 10,0 minutes. L'hypothèse \mathcal{H} est-elle toujours vérifiée sur des durées de cuisson usuelles de 30,0 minutes ?

Problème 2 Réfrigérateur à détente de gaz

Données numériques :

- Constante d'Avogadro : $\mathcal{N}_A = 6,0 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
- Constante de Boltzmann : $k_B = 1,4 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
- Constante molaire des gaz parfaits : $R = 8,3 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$
- Coefficients de van der Waals pour le diazote N_2 : $A = 1,4 \times 10^{-1} \text{ SI}$ et $B = 3,9 \times 10^{-5} \text{ SI}$
- Coefficients de van der Waals pour le dihydrogène H_2 : $A = 2,5 \times 10^{-2} \text{ SI}$ et $B = 2,7 \times 10^{-5} \text{ SI}$

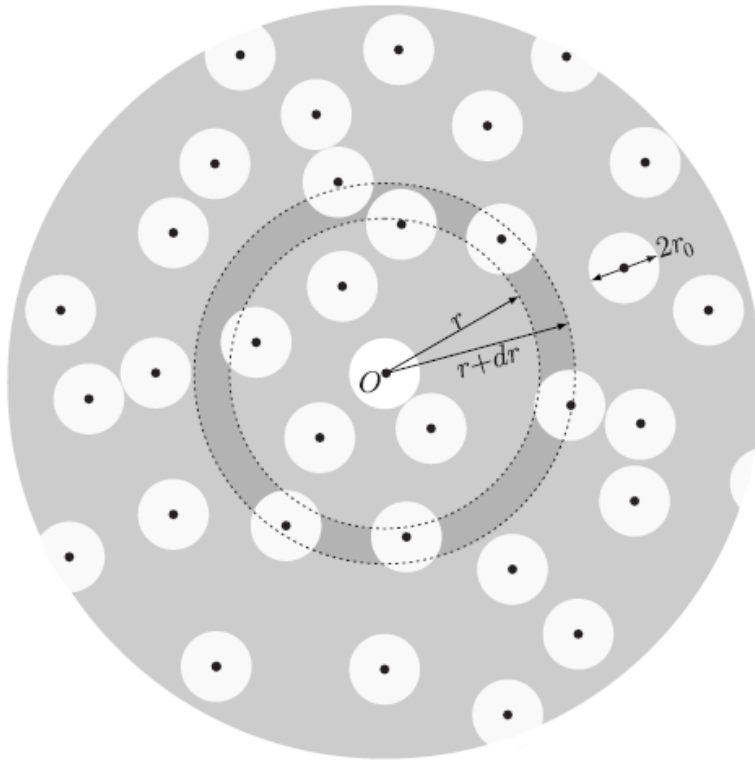
A Modèle de van der Waals

A.1 Donner les différentes contributions de l'énergie interne d'un système thermodynamique formé de N particules. Donner en le justifiant les contributions qui restent lorsque le système considéré est un gaz parfait.

On peut raffiner le modèle du gaz parfait en considérant maintenant le modèle d'un fluide \mathcal{F} constitué de molécules assimilées à des sphères de rayon r_0 en interactions : l'énergie potentielle d'interaction entre deux molécules est attractive, ne dépend que de la distance r entre leurs centres et s'écrit $E_p = -\frac{\alpha}{r^6}$ où $r > 2r_0$ et α une constante. Le volume total occupé par le fluide est V , la température T et l'énergie cinétique moyenne du gaz sera notée $\langle E_c \rangle = \frac{Nk_B T}{\gamma - 1}$

A.2 Quelle est la nature des interactions décrites ici ? Quel est le signe de α ?

Pour le calcul de l'interaction entre une molécule donnée de centre O (à l'origine des coordonnées) et le reste du gaz, on admet que les $N - 1$ autres molécules sont réparties uniformément en fonction de la distance r avec une densité particulière $n^* = \frac{N}{V}$ uniforme pour $r > 2r_0$ (voir la figure ci-dessous).



A.3 Quel est le nombre (moyen) dN de molécules dont le centre est situé à une distance de O comprise entre r et $r + dr$?

A.4 En calculant une intégrale, Montrer que l'énergie potentielle d'interaction moyenne $\langle \varepsilon_1 \rangle$ de la molécule centrée sur O avec toutes les autres s'écrit $\langle \varepsilon_1 \rangle = -\frac{\pi n^* \alpha}{6r_0^3}$. On pourra considérer que $V \gg r_0^3$ pour évaluer les bornes d'intégration.

A.5 En déduire l'expression de l'énergie interne du fluide \mathcal{F} se met sous la forme :

$$U = \frac{Nk_B}{\gamma - 1}T - \frac{N^2 a}{V}$$

dans laquelle on exprimera la constante a en fonction de α et r_0 .

Un modèle un peu plus élaboré de physique statistique permet également d'obtenir l'entropie de la même quantité de fluide \mathcal{F} , elle s'écrit :

$$S = S_0 + k_B N \ln \frac{T^c (V - u)}{T_0^c (V_0 - u)}$$

où l'exposant c ainsi que S_0 , T_0 , V_0 sont des constantes et $u = N \frac{4}{3} \pi (2r_0)^3$

A.6 Justifier physiquement le signe de c .

Pour toute évolution infinitésimale d'un système fluide de température T et à la pression P , on indique la relation $dU = TdS - PdV$ entre les variations dU , dS et dV de l'énergie interne, de l'entropie et du volume.

A.7 En déduire c en fonction de γ ainsi que l'équation d'état $P = f(T, V, N)$ du fluide \mathcal{F} . Commenter.

B Refroidissement par détente adiabatique

Dans cette dernière partie les grandeurs thermodynamiques utilisées sont toujours les mêmes que dans les parties précédentes mais elles s'écrivent pour une mole de fluide. On étudie les évolutions d'un fluide \mathcal{F} caractérisé par l'énergie interne molaire (admise) :

$$U = \frac{RT}{\gamma - 1} - \frac{A}{V}$$

et par l'équation d'état molaire (également admise) :

$$\left(P + \frac{A}{V^2}\right)(V - B) = RT$$

où A et B sont des constantes strictement positives (leurs valeurs numériques pour N_2 et H_2 figurent en début d'énoncé) et $\gamma > 1$. Enfin, le modèle constitue une correction par rapport au modèle du gaz parfait ; en particulier, on se limitera partout aux corrections du premier ordre en fonction des constantes A et B .

B.1 Rappeler l'expression de la fonction d'état enthalpie et en donner une signification physique. On admet que l'enthalpie molaire $H(T, P)$ du fluide s'écrit :

$$H = C_p T - KP \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_r} \right)$$

avec $C_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$, $T_r = \frac{2A}{BR}$ et $K = \frac{2A}{R}$.

B.2 Comment nomme-t-on la détente adiabatique et isenthalpique d'un fluide ?

B.3 On rappelle l'identité thermodynamique reliant H et S : $dH = TdS + VdP$. La transformation ainsi décrite est-elle réversible ?

B.4 À quelle condition une détente de ce type permet-elle un refroidissement ? Qu'en est-il pour un gaz parfait ?

B.5 Faire l'application numérique pour N_2 et H_2 et conclure.

Problème 3 Transformations d'un gaz parfait

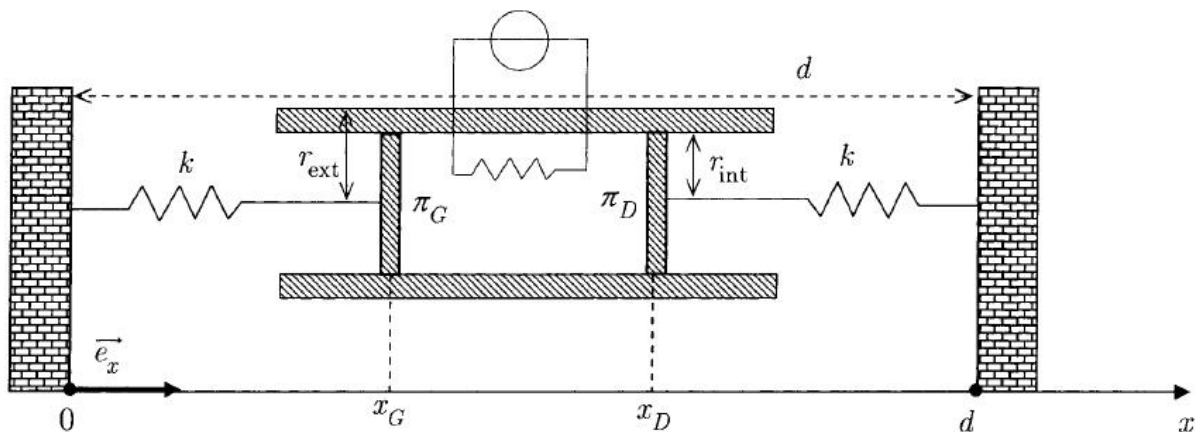
On étudie un dispositif expérimental constitué d'un cylindre horizontal aux parois indéformables de rayon intérieur r_{int} fermé de part et d'autre par deux pistons de masses et d'épaisseurs négligeables. Le cylindre est fixe dans le référentiel du laboratoire et les pistons sont mobiles. Sur le piston de gauche noté π_G est accroché un ressort de raideur k relié à l'autre extrémité à un support fixe. De la même façon, sur le piston droit noté π_D est accroché à un ressort de raideur k relié à l'autre extrémité à un support fixe. Un axe (Ox) muni d'un vecteur unitaire \vec{e}_x permet de repérer les positions x_G et x_D respectivement des pistons π_G et π_D . Le ressort gauche exerce sur le piston π_G une force que l'on peut écrire sous la forme $\vec{F}_G = -k(x_G - x_{G,0})\vec{e}_x$ dans laquelle $x_{G,0}$ représente l'abscisse à vide du piston π_G (ressort au repos). De la même façon, le ressort droit exerce sur le piston π_D une force que l'on peut écrire sous la forme $\vec{F}_D = -k(x_D - x_{D,0})\vec{e}_x$ dans laquelle $x_{D,0}$ représente l'abscisse à vide du piston π_D (ressort au repos). On note $L = x_{D,0} - x_{G,0}$.

Une résistance chauffante de volume et capacité thermique négligeables permet d'apporter de l'énergie thermique au fluide qui se trouve à l'intérieur du cylindre.

On suppose qu'à l'équilibre mécanique du système, la pression est uniforme dans le cylindre.

On supposera en outre dans toute la suite que les frottements lors du déplacement des pistons sont totalement négligeables du point de vue énergétique.

Le cylindre contient n_g moles de gaz assimilable à un gaz parfait de rapport des capacités thermiques γ . À l'extérieur du cylindre, on a créé un vide suffisamment poussé, de sorte qu'il n'y ait pas de forces de pression liées à l'atmosphère extérieure au cylindre. Les parois du cylindre et des pistons sont parfaitement calorifugées.



Données numériques :

- Constante des gaz parfaits : $R = 8,31 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$.
- $L = 0,40 \text{ m}$;
- $r_{int} = 5,0 \text{ cm}$;
- $\gamma = 1,4$;
- $n_g = 0,020 \text{ mol}$;
- $P_A = 0,10 \text{ bar}$;
- $k = 5,0 \times 10^2 \text{ N m}^{-1}$;
- $\alpha = 1,3$.

A Résistance chauffante non alimentée

Dans cette partie, la résistance chauffante n'est pas alimentée électriquement.

Le dispositif expérimental est dans l'état d'équilibre noté A. Le gaz à l'intérieur du piston est à la pression P_A connue.

A.1 Par un bilan de forces sur chacun des pistons, exprimer les positions d'équilibre $x_{G,A}$ et $x_{D,A}$ respectivement des pistons π_G et π_D en fonction de P_A et des constantes du problème.

A.2 En déduire l'expression du volume V_A occupé par le gaz en fonction de P_A et des constantes du problème. Calculer V_A .

A.3 Exprimer littéralement puis calculer numériquement la température T_A du gaz.

B Résistance chauffante alimentée

On alimente électriquement la résistance chauffante pendant une durée déterminée, qui apporte au gaz l'énergie Q sous forme de chaleur. Le gaz atteint alors un nouvel état d'équilibre noté B. Le volume final occupé par le gaz est mesuré et vaut $V_B = \alpha V_A$, avec $\alpha > 1$.

B.1 Exprimer les positions d'équilibre $x_{G,B}$ et $x_{D,B}$, respectives des pistons π_G et π_D , en fonction de V_A et des constantes du problème (on pourra en particulier exploiter les symétries du problème). Calculer V_B .

B.2 Exprimer la pression P_B du gaz dans l'état B en fonction de P_A et des constantes du problème. Calculer P_B .

B.3 Calculer la température T_B du gaz dans l'état B.

B.4 Exprimer la quantité d'énergie échangée par transfert mécanique (travail) par le gaz ($W_{A \rightarrow B}$) au cours de la transformation en fonction de P_A , P_B et des constantes du problème. Calculer $W_{A \rightarrow B}$.

B.5 Exprimer Q en fonction de P_A , P_B , T_A , T_B et des constantes du problème. Calculer Q .

B.6 Exprimer la variation d'entropie du gaz ΔS_{AB} en fonction de P_A , P_B , T_A , T_B et des constantes du problème. Calculer ΔS_{AB} .

On donne l'expression de l'entropie d'un gaz parfait en fonction des paramètres d'état T et V :

$$S(T, V) = S(T_0, V_0) + \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \frac{T}{T_0} + nR \ln \frac{V}{V_0} \quad \text{où } S(T_0, V_0) \text{ est une constante}$$

Problème 4 Moteur de Stirling

Le moteur de Stirling est constitué de deux chambres, une chaude, une froide, reliées par un régénérateur de volume constant pouvant être constitué de fils de cuivre tressés. Le gaz, en circuit fermé, reçoit un transfert thermique d'une source chaude et cède un transfert thermique à la source froide. Le rôle du régénérateur, base de l'invention de Stirling, est fondamental pour obtenir une bonne efficacité. Dans son brevet original de 1816, Stirling explique que le gaz chaud entre dans la partie chaude du régénérateur et est progressivement refroidi durant son parcours pour ressortir par l'autre extrémité à une température presque identique à la température de la source froide. Dans le parcours inverse, le gaz est progressivement réchauffé. Cette astuce technologique permet d'avoir une partie des échanges thermiques internes au moteur. Ce problème comporte 2 parties. La première partie permet de comprendre l'intérêt du régénérateur dans le calcul de l'efficacité. La seconde partie analyse le rôle du volume et des pertes thermiques dans un régénérateur réel.

Constantes du problème :

Constante des gaz parfaits : $R = 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$

Données sur le dihydrogène (H_2) :

Masse molaire : $M_{H_2} = 2,00 \times 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}$

Rapport des capacités thermiques : $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1,40$

Description du cycle de Stirling

Le cycle associé à un moteur de Stirling est constitué de 2 isothermes et de 2 isochores. Il est décrit comme suit :

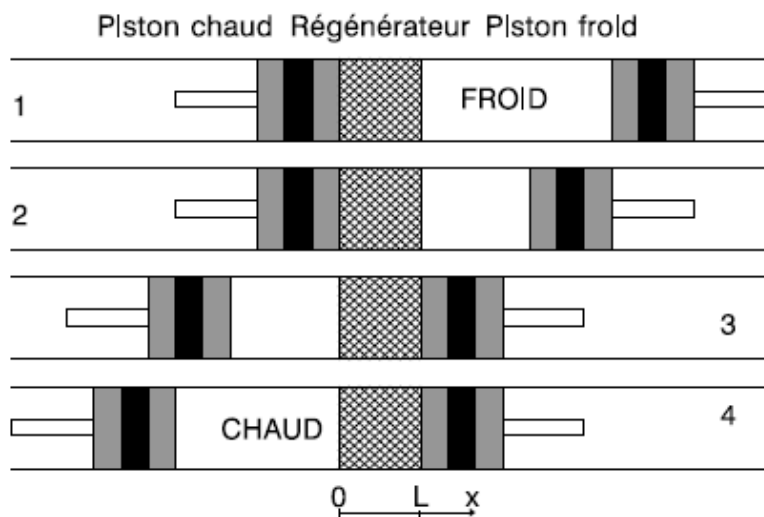
1 \rightarrow 2 compression isotherme à $T_f = 313 \text{ K}$

2 \rightarrow 3 transformation isochore de la température $T_f = 313 \text{ K}$ à la température $T_C = 1173 \text{ K}$

3 \rightarrow 4 détente isotherme à $T_C = 1173 \text{ K}$

4 \rightarrow 1 transformation isochore de la température $T_C = 1173 \text{ K}$ à la température $T_f = 313 \text{ K}$

Ce cycle est représenté sur la figure ci-dessous.



Déplacement des pistons

Caractéristiques du moteur de Stirling retenu

Température de la source chaude : 1173 K

Température de la source froide : 313 K

Volume minimum du gaz libre (uniquement chambre chaude et/ou froide) : $V_m = 1,00 \text{ L}$

Volume maximum du gaz libre (uniquement chambre chaude et/ou froide) : $V_M = 2,00 \text{ L}$

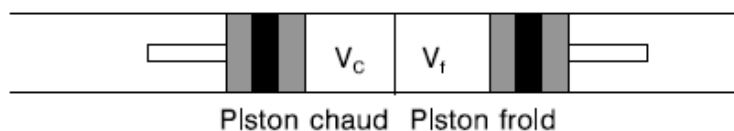
Volume du régénérateur accessible au gaz quand il est pris en compte : $V_r = 0,200 \text{ L}$

Volume du régénérateur occupé par du cuivre : $0,600 \text{ L}$

Masse de dihydrogène, traitée comme un gaz parfait, contenue dans le moteur : $10,0 \text{ g}$.

A Moteur de Stirling avec un régénérateur parfait

Les questions 1 à 9 de cette partie ne tiennent pas compte de la présence du régénérateur. Dans toutes les questions de cette partie A, le volume du régénérateur est nul ($V_r = 0$), comme indiqué sur la figure ci-dessous.



Volumes à considérer pour le régénérateur parfait

- A.1** À partir des caractéristiques du moteur de Stirling, déterminer numériquement le nombre de moles n de gaz et les pressions P_1 , P_2 , P_3 et P_4 .
- A.2** Représenter le cycle moteur de Stirling sur un diagramme $P(V)$.
- A.3** Exprimer algébriquement la variation d'énergie interne ΔU_{ab} et les transferts énergétiques, W_{ab} et Q_{ab} , entre un état a et un état b pour une transformation isotherme.
- A.4** Exprimer algébriquement la variation d'énergie interne ΔU_{cd} et les transferts énergétiques, W_{cd} et Q_{cd} , entre un état c et un état d pour une transformation isochore.
- A.5** Calculer numériquement les travaux $W_{1 \rightarrow 2}$, $W_{2 \rightarrow 3}$, $W_{3 \rightarrow 4}$, $W_{4 \rightarrow 1}$.
- A.6** Calculer numériquement les transferts thermiques $Q_{1 \rightarrow 2}$, $Q_{2 \rightarrow 3}$, $Q_{3 \rightarrow 4}$, $Q_{4 \rightarrow 1}$.
- A.7** Que valent les transferts thermiques Q_C et Q_f provenant des thermostats chaud et froid si aucun dispositif supplémentaire n'intervient (pas de régénérateur) en fonction des transferts thermiques $Q_{1 \rightarrow 2}$, $Q_{2 \rightarrow 3}$, $Q_{3 \rightarrow 4}$, $Q_{4 \rightarrow 1}$? Effectuer l'application numérique.
- A.8** Que vaut le travail W sur le cycle? Effectuer l'application numérique.
- A.9** En déduire numériquement l'efficacité sans régénérateur (e_{sr}).

En présence d'un régénérateur parfait (volume négligeable, transfert parfait), les transferts thermiques $Q_{2 \rightarrow 3}$ et $Q_{4 \rightarrow 1}$ sont internes.

- A.10** Vérifier que les transferts thermiques $Q_{2 \rightarrow 3}$ et $Q_{4 \rightarrow 1}$ se compensent.

L'efficacité (ou rendement) est alors calculée à partir de $e = -\frac{W_{1 \rightarrow 2} + W_{3 \rightarrow 4}}{Q_{3 \rightarrow 4}}$.

- A.11** Justifier cette expression.
- A.12** Calculer algébriquement et numériquement l'efficacité (e).
- A.13** Comparer l'efficacité (e) à l'efficacité de Carnot (e_C).

B Régénérateur non idéal

Le régénérateur peut être constitué d'un empilement de disques de fils de cuivre tressés. On suppose que la température dans le régénérateur varie linéairement avec l'abscisse selon la loi :

$$T(x) = T_C + \frac{x}{L}(T_f - T_C)$$

On prendra pour origine des abscisses la frontière chambre chaude/régénérateur. L représente la longueur du régénérateur. On ne tiendra nullement compte des aspects dynamiques. Il n'y a pas d'échange thermique entre les tranches élémentaires de fluide. Le volume accessible au gaz dans le régénérateur V_r est aussi appelé volume mort.

B.1 Influence du volume mort du régénérateur

Dans le régénérateur, le gradient de température conduit à une distribution de densité moléculaire en fonction des abscisses. Il est donc intéressant de remplacer cette distribution liée au gradient de température par un système équivalent d'un point de vue mécanique : le régénérateur sera alors supposé occupé par n_r moles de dihydrogène à la température effective T_r , quelle que soit l'abscisse. Le volume mort du régénérateur vaut $V_r = 0,200$ L.

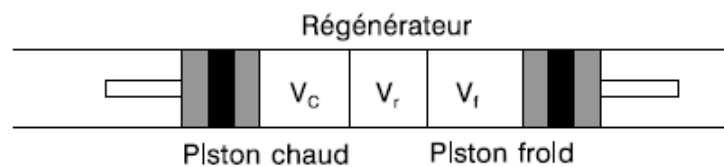
1. Dans le régénérateur, en considérant que la pression est homogène, montrer que la température effective moyenne T_r s'exprime selon :

$$T_r = \frac{T_C - T_f}{\ln \frac{T_C}{T_f}}$$

2. Calculer numériquement T_r .

On suppose que toutes les molécules présentes dans le régénérateur sont à la température T_r .

3. À partir d'un bilan de matière, exprimer la pression P en fonction de n , R , des températures T_r , T_C , T_f et des volumes V_r , V_C et V_f , volumes associés au régénérateur, au piston chaud et au piston froid (voir figure ci-dessous). On considérera la pression identique dans le régénérateur et les deux chambres.



Différents volumes pris en compte

4. Exprimer littéralement le travail $W_{1 \rightarrow 2}$ puis effectuer l'application numérique.
5. Exprimer littéralement le travail $W_{3 \rightarrow 4}$ puis effectuer l'application numérique.
6. Comparer la valeur numérique du travail sur le cycle avec un volume mort de régénérateur de $V_r = 0,200$ L ($W_{V_r \neq 0}$) à sa valeur obtenue sans volume mort ($W_{V_r = 0}$). Commenter.
Pour les transferts thermiques, il est impératif de considérer le gradient de température dans le régénérateur.
7. En discrétisant l'ensemble du système en fines tranches, chaque tranche de gaz est toujours à la température du thermostat local aussi bien dans les chambres que dans le régénérateur. Y a-t-il création d'entropie au cours d'un cycle ? En déduire sans calcul l'efficacité.

B.2 Perte thermique dans le régénérateur

Soit x la fraction de transfert thermique non échangée dans le régénérateur par le gaz lors de la transformation isochore (x varie de 0 à 1). Cette fraction est supposée identique dans les 2 sens de passage. Dans cette partie, le volume mort est supposé nul ($V_r = 0$).

1. Donner une raison qui pourrait expliquer que le transfert thermique n'est pas idéal.
2. Exprimer l'efficacité sous la forme :

$$e = \frac{1 - \frac{T_f}{T_C}}{1 + C_2 \left(1 - \frac{T_f}{T_C}\right)}$$

C_2 étant une constante à exprimer en fonction de x , γ , V_M et V_m .

3. Calculer numériquement C_2 et l'efficacité qui en résulte, en considérant un transfert non idéal correspondant à $x = 10\%$. AN : $\rho_{Cu} = 8913$ kg m⁻³, capacité thermique massique du cuivre : $c = 387$ J K⁻¹ kg⁻¹.
4. Le volume de cuivre nécessaire à la construction du régénérateur vaut 0,600 L. Estimer la variation de température du cuivre induite par le passage du gaz du piston froid au piston chaud ($2 \rightarrow 3$) dans le cas non idéal $x = 10\%$.