



Capacités exigibles :

- Calculer le moment d'une force par rapport à un axe orienté en utilisant le bras de levier \perp .
- Établir l'équation du mouvement à partir du théorème du moment cinétique. \otimes .

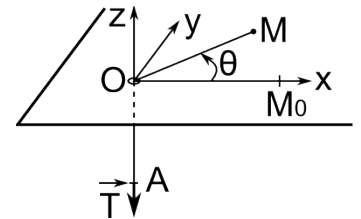
Exercice 1 Particule élastiquement liée*** $\perp \otimes$

Soit un point matériel M de masse m soumis à une force $\vec{f} = -k\vec{OM}$ où O est un point fixe.

1. Montrer que le moment cinétique de M par rapport à O est constant.
2. En déduire que le mouvement est plan.
3. Établir que le mouvement est périodique. On notera ω la pulsation associée.
4. Donner l'expression de \vec{OM} en fonction de ω , de la position initiale \vec{OM}_0 et de la vitesse initiale \vec{v}_0 .
5. En supposant que \vec{v}_0 et \vec{OM}_0 sont perpendiculaires, donner la nature de la trajectoire.
6. À quelle(s) condition(s) a-t-on une trajectoire circulaire ?

Exercice 2 Mouvement d'un point attaché à un fil $\perp \otimes$

Un point matériel M de masse m , attaché à un fil de masse négligeable, est susceptible de glisser sans frottement sur un support plan horizontal. Le fil, qui traverse le support au niveau d'un trou de centre O , subit une traction $\vec{T}(t)$, à son extrémité A . On constate une variation affine de la longueur du fil entre les points O et M du type $OM = a - bt$ (a et b étant des coefficients positifs). À l'instant $t = 0$, le point matériel a été lancé d'un point M_0 de l'axe Ox . À l'instant t le point M est repéré par ses coordonnées polaires : $\theta = (\vec{u}_x, \vec{u}_r)$, $r = OM$ et on pose $\omega = \dot{\theta}$ et $\omega_0 = \dot{\theta}_0$.

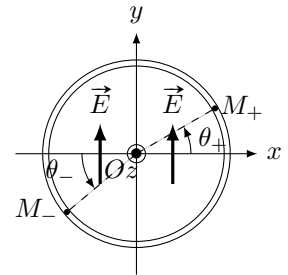


1. Exprimer la vitesse angulaire ω en fonction de a , b , ω_0 et t .
2. Quelle est l'équation polaire $r(\theta)$ de la trajectoire du point M ? Quelle est la nature de cette trajectoire ?
3. Déterminer le travail W de la tension \vec{T} entre les instants $t = 0$ et t .

Exercice 3 Course poursuite $\perp \otimes$

On travaille dans le référentiel terrestre \mathcal{R}_T supposé galiléen, de repère cartésien associé $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ avec (Oz) axe vertical ascendant. Deux petites billes chargées, de charges opposées $\pm q$ avec $q > 0$ sont placées dans une glissière circulaire isolante horizontale de rayon moyen R et d'axe (Oz) . On les assimile à deux points matériels M_+ (charge q) et M_- (charge $-q$), de masse identique m .

Les billes sont initialement immobiles et diamétralement opposées : $\vec{OM}_+(t = 0) = R\vec{u}_x$, $\vec{OM}_-(t = 0) = -R\vec{u}_x$. On plonge l'ensemble à l'instant initial $t = 0$ dans un champ électrique uniforme $\vec{E} = E\vec{u}_y$. Les billes peuvent se déplacer sans frottements dans la glissière et on repérera leurs positions à une date $t > 0$ par les angles θ_+ et θ_- comme indiqué sur le schéma ci-contre. On pourra utiliser des bases polaires adaptées.



Chaque bille est soumise à son poids $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$, à la réaction de la glissière qui ne possède pas de composante orthoradiale et à la force électrostatique due à \vec{E} . On néglige l'interaction électrostatique entre les deux billes.

1. Calculer en utilisant la notion de bras de levier les moments de ces différentes forces par rapport à l'axe orienté $(\Delta) = (O\vec{u}_z)$, pour chacune des deux billes.
2. Reprendre la question précédente par une méthode vectorielle.
3. Appliquer le théorème du moment cinétique à chaque bille par rapport à l'axe (Δ) .
4. Conclure sur leurs mouvements ; pourront-elles se rattraper ?
5. Montrer que θ_+ obéit à l'équation différentielle $\frac{d^2\theta_+}{dX^2} = \cos(\theta_+)$ si $X = \omega_0 t$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{qE}{mR}}$.
6. En utilisant la méthode de résolution d'équations différentielles du second ordre, tracer l'évolution de θ_+ et $\frac{d\theta_+}{dX}$ avec la variable adimensionnée X . Commenter.

Solutions des exercices

¹ Réponses : 3) $\vec{OM} = \vec{OM}_0 \cos \omega t + \frac{\vec{v}_0}{\omega} \sin \omega t$; 6) $x_0 = \frac{v_0}{\omega}$

² Réponses : 1) $\omega = \frac{a^2 \omega_0}{(a-bt)^2}$; $r = \frac{a}{1 + \frac{b}{a\omega_0 \theta}}$; 3) $W = \frac{ma^2 \omega_0^2}{2} \left[\frac{a^2}{(a-bt)^2} - 1 \right]$