

## Problème 1 Attraction gravitationnelle

On considère dans ce problème que la Terre possède une répartition de masse à symétrie sphérique, de centre  $O$ , de masse  $M_T$  et de rayon  $R_T$ . On pourra donc considérer que le champ gravitationnel créé par la Terre en un point  $M$ , extérieur à la Terre, est identique à celui créé par une masse ponctuelle  $M_T$  placée en  $O$ .

### A Satellite en mouvement autour de la Terre

On étudie le mouvement autour de la Terre d'un satellite  $S$  de masse  $m$  placé dans le champ gravitationnel terrestre. On néglige les frottements.

**A.1** Rappeler l'expression du champ gravitationnel  $\overrightarrow{g(M)}$  créé par la Terre en un point  $M$  de l'espace. On notera  $G$  la constante de gravitation universelle et on exprimera  $\overrightarrow{g(M)}$  en fonction de  $G$ ,  $M_T$ ,  $r$  et d'un vecteur unitaire que l'on précisera.

#### Caractéristiques du mouvement du satellite autour de la Terre

**A.2** On se place dans le référentiel, considéré comme galiléen, qui a pour origine le centre de la Terre et ses trois axes dirigés vers « trois étoiles fixes ». Quel est le nom de ce référentiel ?

**A.3** Déterminer l'expression de la force  $\overrightarrow{f}$  à laquelle le satellite est soumis. On exprimera  $\overrightarrow{f}$  en fonction de  $m$ ,  $G$ ,  $M_T$ ,  $r$  et d'un vecteur unitaire que l'on précisera. Quelle est l'expression de la force  $\overrightarrow{f'}$  à laquelle la Terre est soumise de la part du satellite.

**A.4** En appliquant le théorème du moment cinétique, montrer que le mouvement du satellite est nécessairement plan. Sachant qu'à l'instant  $t = 0$ , le satellite se trouve au point  $M_0$  et a une vitesse  $v_0$ , préciser le plan dans lequel se fait le mouvement.

**Dans la suite de cette partie, on se placera dans le cas d'une trajectoire circulaire de rayon  $r$  et d'altitude  $h$  autour de la Terre (avec  $r = h + R_T$ ) et on utilisera les coordonnées cylindriques.**

L'espace est rapporté à la base cylindrique  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ , un point quelconque étant repéré par ses coordonnées  $(r, \theta, z)$ . Le plan dans lequel se fait le mouvement du satellite est le plan du repère cylindrique contenant l'origine  $O$  (centre de la Terre) et les vecteurs  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ .

**A.5** Rappeler l'expression du vecteur position en coordonnées cylindriques et retrouver les expressions des vecteurs vitesse et accélération.

**A.6** En appliquant le principe fondamental de la dynamique, montrer que le module  $v$  de la vitesse du satellite  $S$  est nécessairement constant au cours du mouvement et déterminer son expression en fonction de  $G$ ,  $M_T$  et  $r$ .

**A.7** Déterminer l'expression de la période  $T$  du mouvement de rotation de  $S$  autour de la Terre en fonction de  $v$  et de  $r$  puis en fonction de  $G$ ,  $M_T$  et  $r$ . En déduire la troisième loi de Kepler.

**A.8** Indiquer une méthode pour déterminer la masse de la Terre. Donner sans justification l'ordre de grandeur de la masse de la Terre.

**A.9** Un autre satellite  $S'$ , de masse  $m'$ , en orbite circulaire autour de la Terre à une trajectoire de rayon  $r$  égal au rayon de la trajectoire de  $S$ . Les deux satellites tournent dans le même plan.  $S$  et  $S'$  risquent-ils de se heurter au cours de leur mouvement ? On justifiera la réponse apportée.

### B Étude énergétique

La force à laquelle le satellite  $S$  est soumis dérive d'une énergie potentielle  $E_p$  telle que  $E_p$  peut s'écrire sous la forme  $E_p = -\frac{\alpha}{r}$  avec  $\alpha$  une constante positive. On prendra par convention une énergie potentielle nulle à l'infini.

**On ne se limite pas dans cette partie à un mouvement circulaire mais dans le cas d'un mouvement quelconque du satellite.**

On notera  $C$  la constante des aires données par :  $C = r^2 \dot{\theta}$ .

**B.1** Déterminer l'expression de  $\alpha$  en fonction des données du problème.

**B.2** Déterminer l'expression de l'énergie mécanique  $E_m$  du satellite  $S$  en fonction de  $m$ ,  $r$ ,  $\dot{r}$ ,  $\dot{\theta}$  et  $\alpha$ .

**B.3** En déduire l'expression de l'énergie potentielle effective du satellite en fonction de  $m$ ,  $C$ ,  $r$  et  $\alpha$ . Donner l'allure de la représentation graphique de l'énergie potentielle effective en fonction de  $r$ . En exploitant cette courbe, indiquer en fonction de la valeur de l'énergie mécanique le type de trajectoire suivie par le satellite et préciser dans chaque cas s'il s'agit d'un état de diffusion ou d'un état lié.

**B.4** Déterminer l'énergie mécanique  $E_{mc}$  associée à une trajectoire circulaire de rayon  $r_c$ , en fonction de  $r_c$ ,  $m$ ,  $G$  et  $M_T$ .

**B.5** Déterminer la première vitesse cosmique  $v_1$ , vitesse du satellite sur une orbite basse de rayon  $R_T$  autour de la Terre en fonction de  $R_T$ ,  $G$  et  $M_T$ .

## Problème 2 Cosmologie : Orbitogramme de la Vilette

### A Étude cinématique et force de gravitation

On considère un référentiel galiléen associé au repère orthonormé  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ , l'axe  $Oz$  est vertical ascendant. La position d'un point matériel  $M$  sera définie par ses coordonnées cylindriques,  $r$  ( $r > 0$ ),  $\theta$  et  $z$ . On notera respectivement  $\vec{u}_r$  et  $\vec{u}_\theta$ , les vecteurs unitaires déduits de  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$  par rotation d'angle  $\theta$  autour de  $Oz$ .

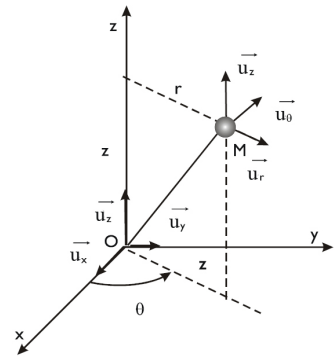
**A.1** Exprimer  $\vec{OM}$  dans la base cylindrique.

**A.2** En déduire la vitesse  $\vec{v}$  dans cette même base.

**A.3** Déterminer l'expression du vecteur accélération  $\vec{a}$  puis montrer que  $\vec{a} \cdot \vec{u}_\theta = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\theta})$ .

**A.4** Rappeler l'expression de la force de gravitation exercée par un point  $M_1$  de masse  $m_1$  sur un point  $M_2$  de masse  $m_2$ . On notera  $r = M_1 M_2$  la distance entre les points et  $\vec{u} = \frac{M_1 M_2}{r}$  le vecteur unitaire orienté de  $M_1$  vers  $M_2$ .

**A.5** Montrer que cette force dérive d'une énergie potentielle dont on établira l'expression. On choisira l'origine de l'énergie potentielle lorsque  $r$  tend vers l'infini.



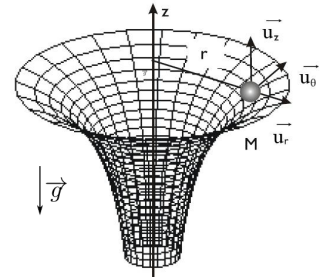
### B Étude dynamique et énergétique

On étudie le mouvement d'une bille d'acier  $M$  de masse  $m$ , assimilée à un point matériel sur une surface de révolution, dans le champ de pesanteur supposé uniforme  $\vec{g} = -g\vec{u}_z$ . La surface sur laquelle roule la bille est engendrée par la révolution d'une portion d'hyperbole,  $z = -\frac{k}{r}$  avec  $k > 0$ . Les frottements seront négligés et la réaction du support sera notée :  $\vec{R}_N = R_r \vec{u}_r + R_\theta \vec{u}_\theta + R_z \vec{u}_z$ .

**B.1** Justifier sans calcul que  $R_\theta = 0$ .

**B.2** Faire un bilan des forces s'exerçant sur la bille. Préciser si ces forces dérivent d'une énergie potentielle. Dans l'affirmative, préciser l'expression de l'énergie potentielle associée en fonction de la variable  $r$  uniquement. On choisira l'origine de l'énergie potentielle lorsque  $r$  tend vers l'infini.

**B.3** Écrire le principe fondamental de la dynamique et faire la projection dans la base cylindrique. En déduire que la quantité  $r^2 \dot{\theta}$  est une constante notée  $C$ .



**B.4** Exprimer l'énergie mécanique sous la forme :  $E_m = \frac{1}{2} m \alpha(r) \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} - \frac{mgk}{r}$ . Préciser  $\alpha(r)$  en fonction de  $k$  et  $r$ . Que peut-on dire de l'énergie mécanique ? Justifier.

**B.5** On définit une énergie potentielle effective  $E_{peff}(r) = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} - \frac{mgk}{r}$ . Tracer l'allure de la courbe  $E_{peff}(r)$ . En fonction de la valeur de l'énergie mécanique initiale du système  $E_0$ , discuter le caractère lié ou libre du mouvement.

**B.6** Pour quelle valeur de  $r$  a-t-on un mouvement circulaire ? On exprimera le rayon du mouvement circulaire  $r_c$  en fonction de  $C$ ,  $g$  et  $k$ .

**B.7** On lance la bille d'une distance  $r_c$  avec une vitesse  $\vec{v}_0$ . Préciser la direction et le module de  $\vec{v}_0$  pour avoir un mouvement circulaire.

## Problème 3 Seul sur Mars

L'histoire du film *The Martian* (Seul sur Mars) de Ridley Scott, montre comment un homme, Mark Watney, survit seul sur Mars grâce à ses connaissances scientifiques. L'environnement hostile de la planète représente une contrainte de taille pour les ingénieurs et les scientifiques qui travaillent pour que des hommes puissent un jour poser le pied sur la planète rouge. La NASA annonce un vol habité pour Mars dans les années 2030, l'hypothèse du film n'est donc pas irréaliste. Même si cette histoire repose sur des travaux scientifiques et des techniques aérospatiales actuelles, on peut se demander si l'histoire est bien réaliste.

### Données

Données Terre-Mars :

	Terre	Mars
Composition de l'atmosphère	N <sub>2</sub> (77%), O <sub>2</sub> (21%)	CO <sub>2</sub> (95%), N <sub>2</sub> (2,7%)
Rayon des planètes (km)	6380	3390
Masse des planètes (kg)	$5,97 \times 10^{24}$	$6,42 \times 10^{23}$

Constantes et grandeurs :

Constante gravitationnelle	$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
Célérité de la lumière	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
Constante d'Avogadro	$\mathcal{N}_A = 6,022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante des gaz parfaits	$R = 8,314 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$
Masses molaire ( $\text{g mol}^{-1}$ )	H : 1,00 ; C : 12,0 ; N : 14,0 ; O : 16,0 ; Ar : 39,9
Distance Terre-Soleil	$a_T = 1 \text{ u.a.} = 1,50 \times 10^8 \text{ km}$
Rayon du Soleil	$R_s = 6,96 \times 10^5 \text{ km}$
Masse du vaisseau Hermès	$\approx 500 \text{ t}$

## A Généralités

**A.1** Définir le référentiel héliocentrique.

**A.2** Montrer que le mouvement d'une planète autour du Soleil de centre de masse  $S$  est plan. Définir ce plan à partir de la position initiale de la planète  $P_0$  et de sa vitesse initiale  $\vec{v}_0$ .

Dans la suite on considère le mouvement de la planète  $P$  de masse  $M_P$  en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  de centre  $S$ .

**A.3** Calculer le moment cinétique de la planète par rapport à  $S$ . En déduire que le produit  $r^2 \dot{\theta}$  est une constante du mouvement.

**A.4** Énoncer puis démontrer la deuxième loi de Kepler.

**A.5** On considère que le mouvement de la planète autour du Soleil est circulaire de rayon  $r_P$ . Montrer que le mouvement est uniforme et exprimer la norme de la vitesse de la planète en fonction de  $G$ , de la masse du Soleil  $M_S$  et de  $r_P$ .

**A.6** Démontrer dans le cas d'un mouvement circulaire que le rapport entre le carré de la période de la révolution de la planète autour du Soleil et le cube de la distance Soleil-planète est constant pour toutes les planètes du système solaire. Exprimer cette constante et nommer cette loi.

## B La planète Mars

Mars est la quatrième planète par ordre de distance croissante au Soleil et la deuxième par masse et par taille croissantes sur les huit planètes que compte le système solaire. Dans le référentiel héliocentrique (aussi appelé référentiel de Kepler), supposé galiléen, la trajectoire de Mars est une ellipse contenue dans le plan de l'écliptique.

Extrait de CNRS *Le journal*

*Question* : Envoyer des humains sur Mars coûterait au moins 100 ou 200 milliards de dollars et ne serait possible que vers 2050, à condition qu'une vraie volonté politique se dégage. Ne vaut-il pas mieux continuer à envoyer des robots ?

*Réponse du planétologue François Forget* : C'est un vieux débat, [...] les robots ne sont pas forcément plus efficaces que les humains. Par exemple, un géologue peut repérer en quelques secondes une pierre intéressante, alors qu'il faudra des jours pour la repérer en manœuvrant un rover depuis la Terre, vu que les signaux radio mettent 5 à 22 minutes entre les deux planètes. Mais il y a une alternative qui me plaît bien : envoyer des humains en orbite martienne sans qu'ils se posent à la surface. Il est en effet très difficile — et donc coûteux — de poser des charges de plus d'une tonne sur Mars. Parce que l'atmosphère y est trop fine pour freiner correctement avec un parachute comme sur Terre, et trop épaisse pour ralentir juste au-dessus de la surface avec de simples rétrofusées comme sur notre Lune. Autre avantage : plus besoin de MAV (Mars Ascent Vehicle) pour remonter, ni d'habitat en surface. Au final, depuis l'orbite, les astronautes pourraient facilement aller se poser sur les petites lunes Phobos ou Deimos (qui n'ont presque pas de gravité), et surtout piloter en quasi temps réel des robots sophistiqués envoyés sur Mars elle-même. Une telle mission pourrait avoir lieu dès 2035.

**B.1** En utilisant l'extrait du *CNRS Le Journal*, proposer une estimation de la distance de Mars au Soleil. On pourra s'aider d'un graphique représentant la trajectoire de Mars et de la Terre autour du Soleil en supposant que celles-ci sont circulaires.

**B.2** Sachant que la période de révolution de Mars est  $T_M = 687$  jours, calculer la valeur de  $a_M$ . Cette valeur est-elle en accord avec les propos rapportés par l'extrait d'article précédent ? Retrouver également une estimation de la masse du Soleil.

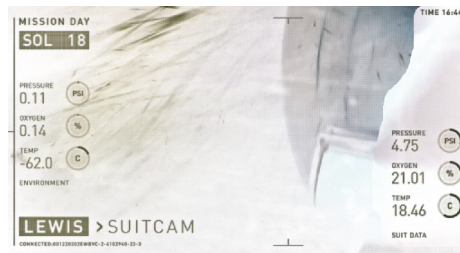
Pour la suite, on prendra  $a_M = 228 \times 10^6 \text{ km}$ .

**B.3** Déterminer la valeur du champ de pesanteur sur Mars.

Lors d'une sortie sur Mars, l'écran de contrôle de Mark Watney est superposé à celui de l'action (figure ci-dessous). À gauche figurent les données externes et à droite celles concernant le scaphandre. Ainsi la pression extérieure vaut 0,11 psi (pound per square inch) alors que la pression interne est de 4,75 psi. Pour la suite on prendra les valeurs lues sur l'écran de contrôle pour les pressions et températures externes et internes (scaphandre).

## C Atmosphère martienne

Lors d'une sortie sur Mars, l'écran de contrôle de Mark Watney est superposé à celui de l'action (figure ci-dessous). À gauche figurent les données externes et à droite celles concernant le scaphandre. Ainsi la pression extérieure vaut 0,11 psi (pound per square inch) alors que la pression interne est de 4,75 psi. Pour la suite on prendra les valeurs lues sur l'écran de contrôle pour les pressions et températures externes et internes (scaphandre).



**C.1** Un bon scientifique pourra s'étonner du pourcentage de dioxygène dans le scaphandre. Quel est le problème ?

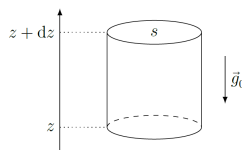
**C.2** Au cours d'une tempête martienne, la combinaison de Mark Watney est percée. Donner deux raisons pour lesquelles Mark Watney ne peut pas survivre dans ces conditions. (On supposera que le scaphandre se dépressurise en restant à température constante.)

L'atmosphère martienne est essentiellement constituée d'un mélange gazeux de dioxyde de carbone, d'argon et de diazote. On assimile ces constituants à un gaz parfait unique de masse molaire  $M = 43,3 \text{ g mol}^{-1}$ , à la pression  $P$  et à la température  $T$ . Dans cette sous-partie, le champ de pesanteur est supposé uniforme, de valeur égale à sa valeur au sol ( $z = 0$ ) :  $g_0 = 3,71 \text{ m s}^{-2}$ .

**C.3** Retrouver à l'aide des données l'ordre de grandeur de la masse molaire  $M$ .

**C.4** On note  $\rho$  la masse volumique d'un gaz parfait. Exprimer  $\rho$  en fonction de  $P$ ,  $T$ ,  $M$  et  $R$ .

On se place dans le cadre du modèle de l'atmosphère isotherme à la température  $T = T_0 = 210 \text{ K}$  ( $T_0$  est la température de surface moyenne martienne). On considère une petite colonne de gaz parfait à l'équilibre mécanique, de sections égales  $s$  comprises entre les altitudes  $z$  et  $z + dz$ . L'axe vertical est pris ascendant (figure ci-dessous).



**C.5** Montrer que la pression atmosphérique  $P$  ne dépend que de  $z$  et l'exprimer en fonction de  $P_0$  (la pression atmosphérique martienne au sol),  $g_0$ ,  $M$ ,  $z$ ,  $R$  et  $T_0$ .

**C.6** Au fond du bassin d'*Hellas Planitia* (altitude  $z = -9,5 \times 10^3 \text{ m}$ , point le plus bas de la planète, la pression atmosphérique vaut  $P_1 = 1,15 \times 10^3 \text{ Pa}$ . Calculer la valeur de la pression  $P_0$  et la comparer à la valeur de la pression atmosphérique terrestre au niveau du sol ( $P_{0T} = 1,0 \times 10^5 \text{ Pa}$ ).

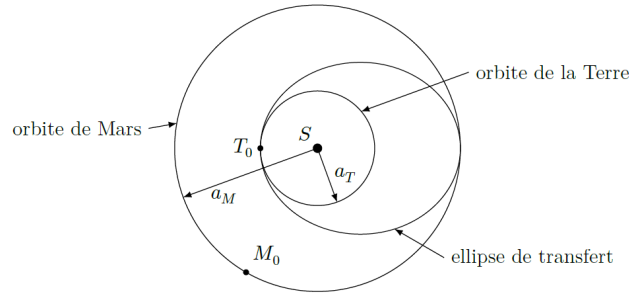
**C.7** En déduire l'expression littérale de la masse volumique  $\rho$  de l'atmosphère martienne en fonction de  $P_0$ ,  $g_0$ ,  $M$ ,  $z$ ,  $R$  et  $T_0$ . On notera  $\rho_0$  la masse volumique au sol ( $z = 0$ ), grandeur à exprimer en fonction de  $P_0$ ,  $M$ ,  $R$  et  $T_0$ . Calculer numériquement  $\rho_0$ .

**C.8** On relève une pression sur le sol martien  $P_0 = 8,0 \times 10^2 \text{ Pa}$ . Comparer cette valeur à celle calculée à la question C.6. Quelle(s) hypothèse(s) du modèle pourrait-on remettre en cause pour expliquer l'écart entre les valeurs mesurée et calculée de  $P_0$  ?

**C.9** Définir par analyse dimensionnelle la distance caractéristique de variation de la pression sur Mars et sur la Terre dans le cas d'une atmosphère isotherme. Calculer numériquement ces distances et le comparer (On donne pour la Terre  $T_0 = 285 \text{ K}$  et  $g_{0T} = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ ).

## D Trajectoire du vaisseau Hermès

Dans cette partie, on se place dans le référentiel de Kepler. Le vaisseau Hermès est utilisé pour les trajets Terre-Mars au cours desquels le vaisseau n'est soumis qu'à l'attraction du Soleil. L'orbite de transfert utilisée est une orbite de transfert de Hohmann : ellipse dont le périhélie est un point de l'orbite de la Terre et l'aphélie un point de l'orbite de Mars (figure ci-dessous). On supposera, pour simplifier, que les orbites de la Terre et de Mars sont circulaires de rayons respectifs  $a_T$  et  $a_M$ .



**D.1** Déterminer le demi grand axe  $a$  de l'ellipse de transfert.

On considère le transfert du vaisseau de la Terre vers la planète Mars, les positions initiales de la Terre et de Mars étant notées respectivement  $T_0$  et  $M_0$ .

**D.2** Déterminer la durée du transfert. En déduire la position de Mars au moment du lancement sur Terre ( $M_0$ ) (décalage angulaire en degrés). En déduire également la position de la Terre au moment de l'arrivée du vaisseau à proximité de Mars (les positions de la Terre et de Mars seront à ce moment là notées respectivement  $T_1$  et  $M_1$ ).

**D.3** Une fois le vaisseau arrivé au voisinage de la planète Mars ( $M_1, T_1$ ), combien de temps faut-il attendre pour envisager un transfert d'Hohmann permettant de ramener le vaisseau à proximité de la Terre ? On notera  $T_2$  et  $M_2$  les positions respectives de la Terre et de Mars au début de ce second transfert.

**D.4** Représenter les points  $T_0, M_0, T_1, M_1, T_2$  et  $M_2$ , ainsi que les orbites d'aller et de retour, sur un schéma reproduisant la figure ci-dessus.

**D.5** En déduire qu'une mission aller-retour vers Mars dure au minimum 972 jours.