TD Mécanique n° 6

Mouvement à forces centrales

Capacités exigibles :

- Montrer la conservation du moment cinétique et en déduire les conséquences, mouvement plan, loi des aires. ◐.
- Exprimer la conservation de l'énergie mécanique et construire une énergie potentielle effective, puis décrire qualitativement le mouvement radial ✠.
- Énoncer les lois de Kepler pour les planètes et les transposer au cas des satellites terrestres ¤.
- Retrouver dans le cas d'un mouvement circulaire, la période du mouvement, l'énergie mécanique et le rayon d'un satellite géostationnaire ☼.

Exercice 1 Satellite terrestre*** ◐✠¤☼

Un satellite terrestre décrit une ellipse d'excentricité $e = 0,72$ et de paramètre $p = 11800\ km$ dans le plan équatorial. On donne la masse de la Terre $M_T = 6.10^{24}\ kg$, la constante de gravitation $G = 6,67.10^{-11}\ SI$, et le rayon de la Terre $R = 6400\ km$. On rappelle l'équation d'une ellipse en coordonnées polaires : $r(\theta) = \frac{p}{1+e\cos\theta}$ où $p = \frac{C^2}{GM_T}$ et C la constante des aires.

1. Calculer l'apogée et le périgée de la trajectoire du satellite et les altitudes correspondantes.
2. Calculer les vitesses maximales et minimales du satellite sur son orbite.
3. Rappeler les propriétés d'un satellite géostationnaire. Comment faut-il procéder pour rendre géostationnaire le satellite précédent ?

Exercice 2 Point matériel élastiquement lié ◐✠

Un point matériel M de masse m est accroché à un ressort (raideur k, longueur l_0 au repos) dont l'autre extrémité est fixée en O. Le point M est susceptible de glisser sans frottement sur le support plan xOy. On repère le point M par son vecteur position $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r}$ en coordonnées polaires. Le référentiel d'étude, de repère $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$ est supposé galiléen.

1. Montrer qu'il y a conservation du moment cinétique du point matériel M, par rapport à O.
2. Le point matériel, situé initialement en M_0, tel que $\overrightarrow{OM_0} = l_1\overrightarrow{u_x}$, est lancé à $t = 0$ avec une vitesse $v_0\overrightarrow{u_y}$. Quelle est l'expression du moment cinétique $\overrightarrow{L_O}$ en coordonnées polaires ? En déduire la relation entre r, $\dot\theta$ à l'instant t.
3. Déterminer l'énergie mécanique E_m du point M, sous la forme : $E_m = \frac{1}{2}m\dot r^2 + E_{p_{eff}}$, $E_{p_{eff}}$ étant l'énergie potentielle effective que l'on précisera.
4. Montrer graphiquement que le mouvement de M doit vérifier la condition $r_1 \leq r \leq r_2$, r_1 et r_2 étant deux valeurs que l'on ne cherchera pas à calculer. Comment s'exprime la norme $||\overrightarrow{v}||$ de la vitesse pour $r = r_1$ ou $r = r_2$?
5. La vitesse $\overrightarrow{v}$ du point M peut-elle s'annuler au cours du mouvement ?
6. Proposer un code python permettant d'afficher l'équation de la trajectoire à partir de la résolution numérique de l'équation différentielle du mouvement.

Exercice 3 Satellite et frottement ☼

Un satellite est placé sur une orbite circulaire de rayon r_0 contenue dans le plan équatorial.

1. Déterminer les énergies potentielles E_p, cinétique E_c et mécanique E_{m0}.
2. L'altitude du satellite étant peu élevée, il subit les frottements des hautes couches de l'atmosphère. Son énergie totale diminue alors avec le temps suivant la loi $E_m = E_{m0}(1 + \alpha t)$ avec $\alpha > 0$ et $E_{m0} < 0$. On suppose que la trajectoire reste circulaire. Déterminer en fonction du temps, le rayon r de la trajectoire et la vitesse v du satellite.
3. En comparant les énergies, expliquer pourquoi la vitesse du satellite augmente alors qu'il est freiné par l'atmosphère.

Exercice 4 Tir d'un projectile ✠

On tire horizontalement un projectile à la surface de la Terre avec une vitesse V_0 telle que $V_0^2 = \alpha\frac{GM_T}{R}$, G désignant la constante de gravitation, R le rayon de la Terre, M_T sa masse et $1 \leq \alpha \leq 2$. En raisonnant sur l'énergie potentielle effective, calculer les altitudes maximale et minimale du projectile. Interpréter le cas $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$.

Exercice 5 Durée des saisons ¤

Les conséquences principales du caractère non circulaire de l'orbite terrestre autour du soleil est l'inégalité des durées des saisons. Il se trouve que les dates des solstices d'hiver et d'été de l'hémisphère nord coïncident avec les passages respectifs de la terre au périhélie H et à l'aphélie E de son orbite. On suppose que H est sur l'axe polaire de la trajectoire elliptique de la Terre et nous noterons O le centre du Soleil. Le référentiel d'étude sera le référentiel héliocentrique supposé galiléen. Les positions des équinoxes de printemps P et d'automne A coïncide avec les passages de la Terre sur la droite perpendiculaire à l'axe polaire passant par O. La durée T_H de l'hiver est de $89,4$ jours tandis que celle du printemps est égale à $T_p = 93,2$ jours.

1. Placer les positions des solstices (E et H) et des équinoxes (P et A) sur l'ellipse. Placer aussi l'axe polaire et l'axe perpendiculaire.
2. En supposant que l'excentricité de l'ellipse est petite montrer que l'aire du secteur OHP est égale à $A = \frac{ab}{4}(\pi - 4e)$, a et b désignant respectivement le demi grand axe et le demi petit axe de l'ellipse. On rappelle que $e = \frac{c}{a}$ avec $c = \Omega O$ où Ω est le centre de l'ellipse.
3. Établir la relation entre la durée de l'hiver T_H, la durée T_A de l'année et e.
4. En déduire la valeur numérique de e.

Exercice 6 Modèle de Bohr ◐✠

Le modèle de Bohr ne permet pas de décrire l'atome d'hydrogène de manière correcte mais permet néanmoins de donner des ordres de grandeur caractéristiques de l'atome et d'introduire la quantification de manière très simple. Le noyau ponctuel est fixe en O. L'électron est en M. On se place dans le référentiel du noyau R lié à la base orthonormée directe $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$, supposé galiléen. $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ est le repère de projection polaire tel qu'en permanence $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r}$. On donne la permittivité du vide $\epsilon_0 = 8,8.10^{-12}$ $F.m^{-1}$, $c = 3.10^8$ $m.s^{-1}$, $h = 6,62.10^{-34}$ $J.s$, la masse de l'électron $m_e = 9,1.10^{-31}$ kg et la charge élémentaire $e = 1,6.10^{-19}$ C.
L'électron décrit une trajectoire circulaire de centre O et de rayon r. On admettra que la seule force non négligeable sur l'électron est la force d'interaction coulombienne noyau-électron.

1. Déterminer la norme v de la vitesse de l'électron dans R en fonction de e, ϵ_0, r et m_e.
2. Déterminer la norme de L du moment cinétique orbital par rapport à O de l'électron dans R en fonction de e, ϵ_0, r et m_e.
3. Démontrer que la force dérive d'une énergie potentielle E_p que l'on exprimera en fonction de e, ϵ_0 et r. On prendra $E_p(\infty) \longrightarrow 0$.
4. En déduire l'énergie mécanique E de l'électron dans R en fonction de e, ϵ_0 et r.
   Pour expliquer le spectre de l'hydrogène, Bohr postula la quantification des éléments cinétiques de l'électron. Il en résulte que $L = n\hbar$ avec $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
5. En déduire que le rayon est quantifié en exprimant r_n en fonction de n et r_1, valeur de r_n pour $n = 1$ puis exprimer r_1 en fonction de e, ϵ_0, m_e et h et le calculer.
6. En déduire que l'énergie mécanique est quantifiée en exprimant E_n en fonction de n et E_1. Exprimer E_1 en fonction de e, ϵ_0, m_e et h et la calculer.

Exercice 7 Collision avec un astéroïde ◐✠

Un astéroïde A de masse m et de taille négligeable par rapport à celle de la Terre est repéré en M_0, à une distance très grande de la Terre où on supposera que son influence gravitationnelle est négligeable. Dans cette position le vecteur vitesse de l'astéroïde est $\overrightarrow{v_0} = -v_0\overrightarrow{u_x}$, porté par la droite $(M_0, \overrightarrow{u_x})$ telle que la distance minimale du centre de la Terre à cette droite est b, que l'on appelle paramètre d'impact. On ne considère dans cet exercice que l'influence gravitationnelle de la Terre, assimilée à une sphère de masse M_T et de rayon R_T

1. Donner deux intégrales premières du mouvement. On exprimera ces dernières en fonction des conditions initiales.
2. Donner l'expression de l'énergie potentielle effective E_{peff} de l'astéroïde dans le champ gravitationnel de la Terre.
3. Exprimer la distance minimale r_{min} à laquelle l'astéroïde passe du centre de la Terre en fonction de G, v_0, M_T et b. En déduire une condition de non-collision.

Exercice 8 Trou noir*** ◐✠☼

En 1783, le physicien britannique John Michell eut l'idée pour la première fois de l'existence d'astres dont la gravitation serait si forte que même la lumière ne pourrait s'en échapper. Cette idée resurgit en 1916 dans le cadre de la relativité générale puisque un tel objet vérifie les équations d'Einstein. Ce concept de trou noir s'est depuis 1960 imposé et on pense aujourd'hui en avoir détecté un grand nombre. On se propose de calculer l'ordre de grandeur de la taille d'un trou noir dans le cadre de la physique classique. On considère un point matériel P de masse m à proximité d'un astre sphérique de centre O, de masse M et de rayon R. Ce point matériel est soumis uniquement à la force gravitationnelle due à l'astre. On se place dans un référentiel $\mathcal{R}$ astrocentrique (dans lequel O est fixe) supposé galiléen.

1. Exprimer l'énergie potentielle dont dérive la force gravitationnelle et l'énergie mécanique du point matériel P. L'énergie mécanique est-elle constante ?
2. Montrer que le mouvement de P est nécessairement plan. P étant alors repéré par ses coordonnées polaires, démontrer que le produit $r^2\dot{\theta}$ est une constante du mouvement.
3. Montrer que l'énergie mécanique peut se mettre sous la forme : $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{peff}(r)$ où on explicitera le terme $E_{peff}(r)$.
4. Tracer $E_{peff}(r)$, puis à l'aide d'un raisonnement graphique, déterminer pour quelles valeurs de E_m le point P peut échapper à l'attraction de l'astre.
5. En déduire la vitesse de libération à la surface de cet astre.
6. Un trou noir est un astre pour lequel la vitesse de libération est supérieure à $c = 3.10^8$ $m.s^{-1}$. Calculer le rayon maximal R_S que doit avoir l'astre de masse M pour être un trou noir. Faire l'application numérique avec la masse du Soleil ($M_S = 2.10^{30}$ kg) et la masse de la Terre ($M_T = 6.10^{24}$ kg), et commenter.

Solutions des exercices

[1] *Réponses 1)* $r_P = 6860$ km, $r_A = 42100$ km ; *2)* $V_P = 10,0$ $km.s^{-1}$, $V_A = 1,63$ $km.s^{-1}$, $\Delta V = 1,45$ $km.s^{-1}$

[2] *Réponses : 2)* $\overrightarrow{L_0} = mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{u_z}$, $r^2\dot{\theta} = l_1v_0$ *: 3)* $E_{p_{eff}} = \frac{ml^2-1v_0^2}{2r^2} + \frac{k}{2}(r-l_0)^2$ *; 4)* $v_1 = \frac{l_1v_0}{r_1}$, $v_2 = \frac{l_1v_0}{r_2}$

[3] *Réponses : 1)* $E_p = -\frac{GMm}{r_0}$, $E_c = \frac{1}{2}m\frac{GM}{r_0}$ *et* $E_{m0} = -\frac{GMm}{2r_0}$ *; 2)* $r = \frac{r_0}{1+\alpha t}$, $v^2 = -\frac{2E_{m0}}{m}(1+\alpha t)$

[4] $r_{min} = R$, $r_{max} = \frac{\alpha}{2-\alpha}R$

[5] *Réponses : 3)* $\frac{T_H}{T_A} = \frac{1}{4}(1 - \frac{4e}{\pi})$ *; 4)* $e = 0,0163$

[6] *Réponses : 1)* $v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r}}$ *; 2)* $L = \sqrt{\frac{m_e r e^2}{4\pi\epsilon_0}}$ *; 3)* $E_p = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ *; 4)* $E = -\frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ *; 5)* $r_n = n^2\frac{h^2\epsilon_0}{\pi m_e e^2} = n^2 r_1$ *; 6)* $E_n = -\frac{m_e e^4}{8h^2\epsilon_0^2}\frac{1}{n^2} = \frac{E_1}{n^2}$

[7] *Réponses : 1)* $E_m = \frac{1}{2}mv_0^2$ *et* $L = mbv_0$ *; 2)* $E_{peff} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{Gm_T m}{r}$ *; 3)* $r_{min} = \frac{GM_T}{v_0^2}(\sqrt{1 + \frac{b^2v_0^4}{G^2M_T^2}} - 1)$

[8] *Réponses : 1)* $E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$ *; 3)* $E_{peff} = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \frac{GMm}{r}$ *; 4)* $E \geq 0$ *; 5)* $v \geq \sqrt{\frac{2GM}{R}}$ *; 6)* $R_S = 3$ km *et* $R_T = 9$ mm