

Problème 1 Attraction gravitationnelle

A Satellite en mouvement autour de la Terre

A.1 $\vec{g}(M) = -\left(\frac{GM_T}{r^2}\right)\vec{e}_r$

A.2 Le référentiel qui a pour origine le centre de la Terre et ses trois axes dirigés vers « trois étoiles fixes » est le référentiel géocentrique.

A.3 $\vec{f} = m\vec{g} = -\frac{GmM_T}{r^2}\vec{e}_r$. D'après le principe des actions mutuelles $\vec{f} = -\vec{f}'$.

A.4 D'après le théorème du moment cinétique en O dans R supposé galiléen on a $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{OM} \wedge \vec{f} = \vec{0}$, d'où $\vec{L}_O = c\vec{s}$. Quelque soit l'instant t considéré, $\vec{OM}(t)$ et $\vec{v}(t)$ reste perpendiculaire à \vec{L}_O constant. Le mouvement est donc plan et ce plan est défini par (\vec{OM}_0, \vec{v}_0) .

A.5 $\vec{OM} = r\vec{e}_r$, $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$ et $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z$

A.6 En projetant suivant \vec{e}_r le principe fondamental de la dynamique, dans R galiléen appliqué au satellite, on a $-mr\dot{\theta}^2 = -G\frac{mM_T}{r^2}$. La projection suivant \vec{e}_θ montre que $\dot{\theta}$ est constant ($m r \ddot{\theta} = 0$). On obtient alors $v = r\dot{\theta} = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}$.

A.7 $T = \frac{2\pi}{\dot{\theta}} = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_T}}$. On en déduit la troisième loi de Kepler : $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$

A.8 On peut obtenir la masse de la Terre en étudiant la trajectoire d'un de ses satellites (naturel ou artificiel). $M_T = 6.10^{24} \text{ kg}$

A.9 Les deux satellites étant sur la même orbite, ils tournent à la même vitesse constante : ils ne peuvent donc pas se heurter !

B Étude énergétique

B.1 $\delta W = \vec{f} \cdot d\vec{\ell} = -dE_p$ soit $E_p = -G\frac{mM_T}{r} + 0$ d'où $\alpha = GmM_T$

B.2 $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{\alpha}{r}$.

B.3 $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{peff}$ avec $E_{peff} = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \frac{\alpha}{r}$. $r \rightarrow 0$, $E_{peff} \rightarrow 0$; $r \rightarrow \infty$, $E_{peff} \rightarrow \infty$. E_{peff} est minimale en $r_m = m\frac{C^2}{\alpha}$. Le mouvement est permis lorsque l'énergie mécanique est supérieure à l'énergie potentielle effective. D'après la courbe (cf cours) Si $E_m < 0$ la trajectoire est bornée (état lié), sinon, la trajectoire n'est pas bornée (état de diffusion).

B.4 Lorsque l'énergie mécanique est égale au minimum de l'énergie potentielle effective, le mouvement est circulaire de rayon $r_m = \frac{mC^2}{\alpha}$. L'énergie mécanique associée est égale à $E_{mc} = -\frac{GM_T m}{2r_c}$.

B.5 D'après l'expression de la vitesse d'un satellite en orbite circulaire calculée précédemment on $v_1 = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T}}$

Problème 2 Cosmologie : Orbitogramme de la Vilette

A Étude cinématique et force de gravitation

A.1 $\vec{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$.

A.2 $\vec{v}(M) = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z$.

A.3 $\vec{a}(M) = \frac{d\vec{v}}{dt} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{u}_z$. $\vec{a} \cdot \vec{u}_\theta = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = \frac{1}{r}(2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta}) = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$

A.4 $\vec{F}_{M_1 \rightarrow M_2} = -\frac{Gm_1 m_2}{r^2}\vec{u}$.

A.5 $dE_p = -\delta W = \vec{F}_{M_1 \rightarrow M_2} \cdot d\vec{\ell}$ et $d\vec{\ell} = dr\vec{u} + r d\vec{u}$ avec $d\vec{u} \perp \vec{u}$ d'où $dE_p = \frac{Gm_1 m_2}{r^2} dr$ soit $E_p = -\frac{Gm_1 m_2}{r} + cste$ et $E_p(\infty) = 0$ soit $E_p = -\frac{Gm_1 m_2}{r}$.

B Étude dynamique et énergétique

B.1 La symétrie du dispositif permet d'affirmer que $R_\theta = 0$

B.2 La bille est soumise uniquement au poids et à la réaction du support. Seul le poids dérive d'une énergie potentielle. L'énergie potentielle de pesanteur est égale à $E_p = mgz + cste = -\frac{mgk}{r} + cste$ et $E_p(\infty) = 0$ soit

$$E_p = -\frac{mgk}{r}$$

B.3 On applique le principe fondamental de la dynamique à la bille dans le référentiel d'étude galiléen. On a alors $m\vec{a} = \vec{R}_N - mg\vec{u}_z$ soit en projetant

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = R_r \\ m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \\ m\dot{z} = -mg + R_z \end{cases}$$

La projection du PFD suivant \vec{u}_θ permet de déduire que $C = r^2\dot{\theta}$ est une constante du mouvement.

B.4 L'énergie cinétique s'exprime sous la forme $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ et $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2$ avec $r^2\dot{\theta}^2 = \frac{C^2}{r^2}$ et $\dot{z} = \frac{dz}{dr}\dot{r} = \frac{k}{r^2}\dot{r}$. Soit $E_c = \frac{1}{2}m(1 + \frac{k^2}{r^4})\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2}$. On en déduit l'expression de l'énergie mécanique $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\alpha(r)\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \frac{mgk}{r}$ avec $\alpha(r) = 1 + \frac{k^2}{r^4}$. L'énergie mécanique est constante puisqu'il n'y a pas de frottement et que la puissance de la réaction du support est nulle car perpendiculaire à la vitesse du point matériel.

B.5 $E_{p_{eff}}(r) = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \frac{mgk}{r}$. On a $E_{p_{eff}}(0) \rightarrow +\infty$ et $E_{p_{eff}}(\infty) \rightarrow 0$. En dérivant l'énergie potentielle effective par rapport à r , on constate que l'énergie potentielle effective passe par un minimum pour $r_m = \frac{C^2}{gk}$ et $E_{p_{eff}}(r_m) < 0$. L'intérêt de cette représentation est que l'énergie mécanique est supérieure ou égale à l'énergie potentielle effective puisque $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 > 0$. Lorsque l'énergie mécanique est strictement négative le système est dans un état lié ($r \in [r_{min}, r_{max}]$), et dans un état de diffusion lorsque l'énergie mécanique est positive ($r \in [r_{min}, \infty[$)

B.6 On a un mouvement circulaire lorsque E_0 est égale au minimum d'énergie potentielle effective. On a alors $r_c = \frac{C^2}{gk}$.

B.7 Pour avoir un mouvement circulaire, on doit avoir $\dot{r} = 0$ soit $\dot{z} = 0$, on alors uniquement une vitesse orthoradiale ($\vec{v}_0 = r_c\dot{\theta}\vec{u}_\theta$). De plus on sait que C est constant, on a alors $C = r_c^2\dot{\theta} = r_cv_0$. Or $r_c = \frac{C^2}{gk} = \frac{r_c^2v_0^2}{gk}$.

On en déduit $v_0^2 = \frac{gk}{r_c}$ soit $\vec{v}_0 = \pm\sqrt{\frac{gk}{r_c}}\vec{u}_\theta$.

Problème 3 Seul sur Mars

A Généralités

A.1 Le référentiel héliocentrique associe le repère qui a pour centre, le centre de masse du Soleil et 3 axes dirigés vers 3 étoiles très lointaines (fixes) avec une échelle de temps.

A.2 On étudie une planète assimilée à un point matériel P dans le référentiel héliocentrique supposé galiléen. On suppose qu'il ne s'exerce sur cette planète que la force d'attraction du Soleil (on néglige les interactions avec les autres planètes et avec d'éventuels satellites). Cette force s'écrit $\vec{F} = -G\frac{M_S M_P}{SP^3}\vec{SP}$.

On applique le théorème du moment cinétique à la planète par rapport au point S : $\frac{d\vec{L}_S}{dt} = \vec{SP} \wedge \vec{F} = \vec{0}$ puisque \vec{F} et \vec{SP} sont colinéaires. Le moment cinétique de la planète est donc constant et peut être déterminé à l'instant $t=0$ $\vec{L}_S = \vec{SP}_0 \wedge M_P\vec{v}_0$. \vec{L}_S est donc perpendiculaire à \vec{SP}_0 et à \vec{v}_0 . Puis quelque soit le temps les vecteurs $\vec{SP}(t)$ et $\vec{v}(t)$ resteront perpendiculaire à \vec{L}_S et le mouvement restera dans le plan (\vec{SP}_0, \vec{v}_0) .

A.3 En utilisant les coordonnées polaires, on a $\vec{SP} = r\vec{u}_r$ et $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$. On a ainsi $\vec{L}_S = \vec{SP} \wedge M_P\vec{v} = M_P r^2\dot{\theta}\vec{u}_z$. Le moment cinétique étant constant, on obtient que $r^2\dot{\theta} = \text{cst}$.

A.4 La deuxième loi de Kepler dit que l'aire balayée par le rayon vecteur Soleil-Planète est proportionnelle au temps mis pour la parcourir. Elle se démontre à partir de la constante des aires.

Notons $S(t)$ la surface balayée par le vecteur \vec{OM} entre la date $t=0$ et la date t . Un développement de Taylor permet d'écrire : $S(t+dt) = S(t) + \frac{dS}{dt}dt + \frac{1}{2}\frac{d^2S}{dt^2}(dt)^2 + o(dt)^2$.

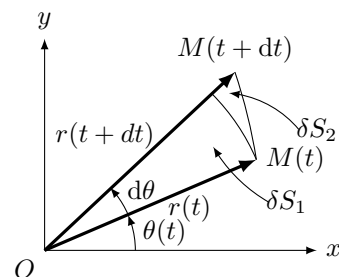
Soient $M(t)$ et $M(t+dt)$ les positions du point matériel étudié aux dates t et $t+dt$. Entre ces deux dates, r varie de $dr = r(t+dt) - r(t)$, θ varie de $d\theta = \theta(t+dt) - \theta(t)$ et le vecteur position balaye la surface : $S(t+dt) - S(t) = \delta S_1 + \delta S_2$ (figure ci-contre).

δS_1 est la surface d'une portion de disque de rayon r et d'angle au centre $d\theta$. Elle vaut $\delta S_1 = \pi r^2 \frac{d\theta}{2\pi} = \frac{1}{2}r^2 d\theta$. C'est un infiniment petit d'ordre 1.

La surface δS_2 est assimilable en première approximation à un triangle rectangle dont les cotés de l'angle droit valent dr et $r d\theta$. D'où $\delta S_2 \simeq \frac{1}{2}r d\theta dr$. C'est un infiniment petit d'ordre 2.

δS_1 correspond donc au terme d'ordre 1 du développement de Taylor. Par identification :

$$\frac{dS}{dt}dt = \frac{1}{2}r^2 d\theta = \frac{1}{2}r^2 \dot{\theta} dt$$



Nous pouvons en déduire que la surface balayée par unité de temps vaut $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$. Cette expression porte le nom de **vitesse aréolaire**. Elle est égale à $C/2$ et c'est une constante du mouvement. Elle se mesure en $m^2 \cdot s^{-1}$.

A.5 La loi de la quantité de mouvement appliquée à la planète corps céleste dans le référentiel héliocentrique supposé galiléen conduit à :

$$M_P \vec{a} = M_P(r_P \ddot{\vec{u}}_\theta - r_P \dot{\theta}^2 \vec{u}_r) = -\frac{GM_P M_S}{r_P^2} \vec{u}_r$$

Sur \vec{u}_θ : $M_P r_P \ddot{\theta} = 0$, soit $\dot{\theta} = \text{cste}$. Nous retrouvons ainsi le caractère uniforme du mouvement circulaire.

Sur \vec{u}_r : $-M_P r_P \dot{\theta}^2 = -\frac{GM_P M_S}{r_P^2}$. Or $\vec{v} = v \vec{u}_\theta = r_P \dot{\theta} \vec{u}_\theta$ donc $r_P \dot{\theta}^2 = \frac{v^2}{r_P}$. Nous en déduisons $\frac{v^2}{r_P} = \frac{GM_P M_S}{r_P^2}$.

D'où : $v = \sqrt{\frac{GM_S}{r_P}}$.

A.6 Cette loi est la troisième loi de Kepler. Le mouvement étant circulaire uniforme, la période T est la durée mise par le système pour faire un tour complet à la vitesse v : $T = \frac{2\pi r_P}{v}$. Avec $v = \sqrt{\frac{GM_S}{r_P}}$, nous obtenons :

$T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{GM_s} r_1^3}$. Nous pouvons en déduire $\frac{T^2}{r_P^3} = \frac{4\pi^2}{GM_s}$ et remarquer que le rapport $\frac{T^2}{r_P^3}$ ne dépend que de la masse du Soleil et est constant pour tout astre en interaction gravitationnelle avec le Soleil.

B La planète Mars

B.1 On exploite la phrase suivante : « les signaux radio mettent 5 à 22 minutes entre les deux planètes ». Dans le cas le plus favorable et en supposant les trajectoires circulaires, la distance entre les deux planètes est $d_{\min} = a_M - a_T = c\tau_{\min}$ et le temps de transmission des signaux s'écrit $\tau_{\min} = \frac{a_M - a_T}{c} = 5 \text{ min}$. Dans le cas le plus défavorable la distance maximale entre les planètes est $d_{\max} = a_M + a_T = c\tau_{\max}$. En sommant ces deux équations on obtient $2a_M = c(\tau_{\max} + \tau_{\min})$ soit $a_M = \frac{c(\tau_{\max} + \tau_{\min})}{2} = 2,4 \times 10^8 \text{ km}$.

B.2 On utilise la troisième loi de Kepler : $\frac{T_M^2}{a_M^3} = \frac{T_T^2}{a_T^3}$ soit $a_M = a_T \left(\frac{T_M}{T_T}\right)^{\frac{2}{3}} = 2,29 \times 10^8 \text{ km}$ en prenant $T_T = 365,25 \text{ jours}$. On retrouve ainsi l'ordre de grandeur obtenu dans la question précédente (les durées ne sont données qu'avec un chiffre significatif).

A partir de la troisième loi de Kepler, on peut remonter à la masse du Soleil puisque $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S}$ soit $M_S = \frac{4\pi^2 a^3}{GT_M^2} = 2,0 \times 10^{30} \text{ kg}$.

B.3 À la surface de Mars, la force gravitationnelle exercée par Mars sur un objet de masse m s'écrit en norme $F = mg_0$ avec $g_0 = \frac{GM_M}{R_M^2} = 3,73 \text{ m s}^{-2}$.

C Atmosphère martienne

C.1 Le pourcentage de dioxygène est comparable à la valeur usuelle à la surface terrestre. Cependant la pression totale $P = 4,75 \text{ PSI} = 0,33 \text{ bar}$ est trois fois plus faible qu'à la surface terrestre, donc la pression partielle de dioxygène est trois fois plus faible qu'à la surface terrestre : Mark Watney est en sous oxygénation (la valeur de la pression est de l'ordre de grandeur de la pression à environ 8 km d'altitude).

C.2

- la pression partielle de dioxygène devient identique à celle de la surface martienne : $P_{O_2} = 1,4 \times 10^{-3} P_M = 1,1 \text{ Pa}$ très faible : asphyxie ;
- Même si la température dans la combinaison reste égale à $18,5^\circ \text{C}$, la pression s'égalisant avec la pression martienne (758 Pa), l'eau se vaporise, d'où des risques de lésions pulmonaires importants (perte d'eau, rupture des membranes cellulaires et destruction des cellules tapissant les alvéoles pulmonaires).

C.3 L'atmosphère martienne est un mélange gazeux constituée de 95% de dioxyde de carbone, de 2,3% d'argon et de 2,7% de diazote. On a ainsi $M = 0,95M_{CO_2} + 0,023M_{Ar} + 0,027M_{N_2} = 43,5 \text{ g mol}^{-1}$. On retrouve ainsi l'ordre de grandeur de la masse molaire M .

C.4 En assimilant l'atmosphère comme un gaz parfait, on a $PV = \frac{m}{M} RT$ soit $\rho = \frac{m}{V} = \frac{PM}{RT}$.

C.5 Les forces qui s'exercent sur cette particule mésoscopique sont les forces de pression et la force de pesanteur. L'équilibre de la particule permet de montrer que les forces de pression qui s'exercent sur la surface latérale se compensent deux à deux. En revanche les forces de pression qui s'exercent sur les disques d'altitudes z et $z + dz$ ne se compensent pas en raison de la force de pesanteur et l'équilibre de la particule conduit à $P(z)s - P(z + dz)s - \rho s dz g_0 = 0$. On obtient alors $\frac{dP}{dz} = -\rho g_0 = -\frac{PMg_0}{RT_0}$. On reconnaît ainsi une équation différentielle du premier ordre vérifiée par $P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{Mg_0}{RT_0}z\right)$.

C.6 En utilisant l'expression de la question précédente on a $P_0 = P_1(z_1) \exp\left(\frac{Mg_0}{RT_0}z_1\right) = 480 \text{ Pa}$. Cette pression atmosphérique martienne est 208 fois plus faible que la pression atmosphérique terrestre.

C.7 D'après les questions précédentes $\rho(z) = \frac{P(z)M}{RT_0} = \rho_0 \exp\left(-\frac{Mg_0}{RT_0}z\right)$ avec $\rho_0 = \frac{P_0M}{RT_0} = 1,19 \times 10^{-2} \text{ kg m}^{-3}$. La densité de l'air est 100 fois plus faible que sur Terre.

C.8 On relève une pression sur le sol martien $P_0 = 8,0 \times 10^2 \text{ Pa}$ double par rapport à ce que l'on a obtenu. Le modèle de l'atmosphère isotherme ne peut donc être retenu. En revanche pour une profondeur de 10 km, le champ de pesanteur martien peut toujours être considéré comme uniforme ($z_1 \ll R_M$).

C.9 D'après l'expression de la pression, on pose $H = \frac{RT_0}{Mg_0}$ la distance caractéristique de variation de la pression (homogène à des mètres). Sur Terre $H_T = 8,33 \text{ km}$ alors que sur Mars $H_M = 10,9 \text{ km}$. Ces distances sont donc comparables ce qui peut nous permettre de dire que les épaisseurs d'atmosphères sont comparables dans le cas d'un modèle isotherme.

D Trajectoire du vaisseau Hermes

D.1 D'après le graphique fourni $2a = a_T + a_M$ soit $a = \frac{a_T + a_M}{2} = 189 \times 10^6 \text{ km}$.

D.2 On utilise la troisième loi de Kepler $\frac{T_T^2}{a_T^3} = \frac{4\tau^2}{a^3}$ où τ est la durée de transfert égale à une demi période de révolution du vaisseau autour du Soleil. soit $\tau = T_T \left(\frac{a}{a_T}\right)^{\frac{3}{2}} = 258 \text{ jours}$.

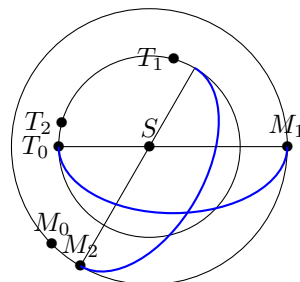
La vitesse angulaire de Mars autour du Soleil est égale à $\omega_M = \frac{360}{T_M} = 0,524^\circ/\text{jour}$. Pendant la durée du trajet τ Mars parcourt $\omega_M \tau = 135^\circ$. De son coté la Terre tourne autour du Soleil à une vitesse angulaire égale à $\omega_T = \frac{360}{T_T} = 0,986^\circ/\text{jour}$. Pendant la durée τ , la terre tourne de 254° . On ainsi donner les coordonnées polaires de centre S des points $M_0(a_M : -135)$, $M_1(a_M : 0)$, $T_0(a_T : 180)$ et $T_1(a_T : 74,3)$

D.3 Pour pouvoir envisager un voyage retour (de même durée que le voyage aller ; il faut que la Terre soit au départ du vol de retour, 254° en arrière du point de rencontre c'est à dire $254,3 - 180 = 74,3^\circ$ derrière la position de Mars (même configuration que le vol aller).

On souhaite calculer le temps nécessaire pour retrouver cette configuration planétaire :

A l'arrivée du vaisseau sur Mars, la Terre avait $74,3^\circ$ d'avance sur Mars et il faut qu'elle soit en retard par rapport à Mars de $74,3^\circ$. D'après les vitesses angulaires calculées précédemment la Terre rattrape Mars à raison de $0,462^\circ/\text{jour}$. Pour passer de $74,3^\circ$ d'avance à $74,3^\circ$ de retard, elle doit parcourir $360 - 2 \times 74,3 = 211^\circ$ par rapport à Mars. Ce qu'elle fait en 457 jours.

D.4 Par rapport à l'instant de départ il s'est déroulé 715 jours, pendant ce temps les planètes Terre et Mars ont tourné de $\omega_T 715 = 705^\circ$ et $\omega_M 715 = 375^\circ$. Connaissant les positions initiales T_0 et M_0 on en déduit les coordonnées de $T_2(a_T : 165)$ et $M_2(a_M : 240)$. Les différents points sont représentées sur la figure ci-dessous :



D.5 Une mission aller-retour vers Mars dure donc minimum 973 jours. (on trouve un jour de plus que dans le sujet...)