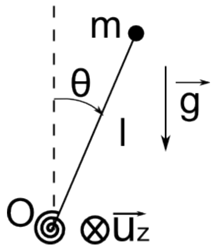
TD Mécanique n° 7

Mécanique du solide – Solide en rotation

Capacités exigibles :
- Relier qualitativement le moment d'inertie et la répartition des masses ◐.
- Calculer le moment d'une force par rapport à un axe orienté en utilisant le bras de levier ⌑.
- Définir un couple et savoir qu'un moteur ou un frein contient nécessairement un stator pour qu'un couple puisse s'exercer ✠.
- Établir l'équation du mouvement à partir du théorème du moment cinétique. ☼.

Exercice 1 Gravimètre ⌑☼



Étudions le mouvement d'une barre de longueur l, de masse négligeable au bout de laquelle est fixé un point matériel M de masse m. Cette barre tourne sans frottement autour de l'axe horizontal Oz. Le point M est soumis à son poids et la liaison avec la barre se traduit par un couple de force élastique de moment $\overrightarrow{\Gamma} = -C\theta\overrightarrow{u_z}$ dû à un ressort spirale fixé au point O.

1. Trouver l'équation horaire du mouvement de la barre pour un angle θ petit, et préciser dans quel cas la position verticale est une position d'équilibre stable. On poser $G = \frac{C}{ml}$
2. L'intérêt de ce dispositif, appelé gravimètre, est de mesurer sur le terrain avec précision la valeur de l'accélération de pesanteur g. Soit T la période des oscillations : à quelle variation dg de l'accélération de la pesanteur g correspond une variation relative de la période T ayant pour valeur $\frac{dT}{T} = 10^{-3}$?
3. Pour une même variation relative de la période, comparer la variation dg' obtenue avec un pendule simple de même longueur l et de période $T' = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. AN : $T = 0,5\ s$; $g = 9,81\ m.s^{-2}$; $l = 3,2\ cm$.

Exercice 2 Volant d'inertie d'une machine tournante *** ◐⌑✠☼

On considère une machine (tour, fraiseuse…) dont une partie massive (l'outil) peut être mise en rotation autour d'un axe fixe Δ par l'action d'un couple moteur. L'outil possède un moment d'inertie J_Δ par rapport à l'axe Δ et sa vitesse angulaire de rotation autour de Δ est notée ω. On suppose que l'ensemble des forces de frottement subies par l'outil peut être représenté par un moment par rapport à l'axe de la machine de la forme $\mathcal{M}_\Delta = -k\omega$, où k est une constante positive.

1. Initialement immobile, l'outil est soumis à partir de l'instant $t = 0$ à l'action d'un couple moteur de moment $\Gamma = \Gamma_0$ constant. Déterminer l'équation du mouvement de l'outil vérifié par $\omega(t)$.
2. En résolvant cette équation, analyser le mouvement de l'outil en identifiant d'abord la vitesse angulaire ω_0 atteinte en régime permanent, puis le temps de relaxation τ_∞ du système correspondant à un écart relatif entre ω et ω_0 inférieur à 1%.

La présence de vibrations indésirables est inévitable sur ce genre de machine. Afin de les prendre en compte, on suppose que le couple moteur n'est plus constant mais modulé à la fréquence $\frac{\Omega}{2\pi}$ avec un taux de modulation η. Le moment par rapport à Δ de ce couple s'écrit alors $\Gamma(t) = \Gamma_0(1 + \eta\cos(\Omega t))$.

3. Établir l'équation différentielle vérifiée par la fonction $e(t)$ telle que $\omega(t) = \omega_0(1 + e(t))$.
4. Montrer qu'au bout d'un temps suffisant, $e(t)$ est une fonction sinusoïdale de pulsation Ω que l'on cherchera sous la forme $e(t) = a\cos(\Omega t + \psi)$. On exprimera les constantes a et ψ en fonction des données η, Ω et τ.
5. A l'aide des expressions précédentes, expliquer pourquoi, de façon à régulariser le fonctionnement d'une machine tournante, on adjoint aux parties tournantes un anneau massif de grand rayon appelé volant d'inertie.

Exercice 3 Décollage d'un stylo ◐

On modélise un stylo à cliquet par un système à deux points matériels : le corps du stylo C de masse $M = 20$ g est relié au bouton B de masse $m = 2$ g par un ressort de masse négligeable, de longueur à vide $\ell_0 = 3,0$ cm et de constante de raideur $k = 100$ N.m^{-1}. On donne $g = 10$ m.s^{-2}. Le poids est une force extérieure et la force de rappel du ressort est considérée comme une force intérieure d'interaction entre B et C. On pose le stylo à la verticale, le bouton B est au contact d'une table horizontale formant l'origine de l'axe vertical ascendant (Oz) et le ressort est comprimé : sa longueur vaut $h = 1,0$ cm. On libère le cliquet du stylo à l'instant initial (état I). Le ressort se détend et atteint sa longueur à vide ℓ_0 sans osciller (état D) puis il décolle. Le corps du stylo monte jusqu'à l'altitude maximale H (état F) avant de retomber.

1. Calculer le travail de la force intérieure du ressort et celui du poids entre les états I et D. Pourquoi la force exercée par la table sur le bouton B ne travaille-t-elle pas ?
2. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, déterminer l'énergie cinétique du stylo E_{cD} dans l'état D. Calculer la vitesse de C juste avant que le stylo ne décolle D^- et juste après D^+.
3. Calculer la hauteur H atteinte par C dans l'état F.

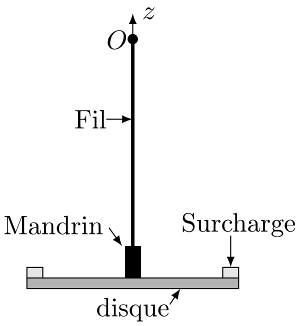
Exercice 4 De quel côté tombent les tartines beurrées ? ◐¤☼

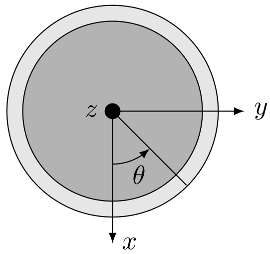
Existe-t-il une raison pour laquelle les tartines beurrées tomberaient plus souvent du côté beurré ? On imagine une tartine homogène (longueur $2a$, largeur 2b et d'épaisseur $2e$ et masse m) posée sur une table. Sans faire attention une personne la pousse vers un bord très lentement. Quand le milieu de la tartine atteint le bord O de la table, la tartine amorce une rotation autour de l'arête Oy. L'action de la table sur la tartine est modélisée par une force $\overrightarrow{R} = T\overrightarrow{u_\theta} + N\overrightarrow{u_r}$ appliquée en O. On note θ l'angle entre la tartine et l'horizontale et on donne le moment d'inertie de la tartine selon Oy : $J_{Oy} = \frac{1}{3}m(a^2 + 4e^2)$

1. À l'aide d'une approche énergétique, exprimer $\ddot{\theta}$ en fonction de θ, ainsi que $\dot{\theta}$ en fonction de θ.
2. Retrouver l'expression de $\ddot{\theta}$ en fonction de θ à l'aide du théorème du moment cinétique.
3. Appliquer la loi de la quantité de mouvement à la tartine, projeter sur les vecteurs $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$, et déterminer T et N. Simplifier ces expressions en prenant $a = 4$ cm et $e = 0,4$ cm. La tartine peut-elle quitter la table sans glisser ? Comme le coefficient de frottement table/tartine vaut à peu près 1, à quel angle θ_0 la tartine commence-t-elle à glisser ?
4. À partir de cet instant pris comme origine du temps, la tartine quitte la table en un temps très bref, conservant quasiment la même orientation θ_0 et la même vitesse angulaire. Quelle est après avoir quitté la table, la loi d'évolution de $z_G(t)$, où G est le barycentre de la tartine, en supposant que la tartine ne retouche plus la table ?
5. Déterminer le temps τ pour lequel la tartine touche le sol. On considérera que la hauteur h de la table est évidemment nettement supérieure aux dimensions de la tartine et que la vitesse initiale de la tartine est très faible devant sa vitesse finale.
6. On admet que pendant la phase de vol, la vitesse angulaire de la tartine reste constante, égale à ω_0. Quelle est son expression ? En déduire $\theta(\tau)$. Application numérique pour $h = 70\ cm$.
7. De quel côté tombe donc la tartine, si on suppose qu'il n'y a pas de rebond ?
8. Des astronautes prennent leur petit déjeuner sur la Lune. De quel côté tombent les tartines ?

Exercice 5 Le couple ne tient qu'à un fil ¤☼

On réalise un pendule de torsion avec un fil et un disque de rayon $R = 10\,\text{cm}$ sur lequel est fixé un mandrin. Le fil est attaché en O.





La rotation du disque autour de l'axe Oz est repérée par l'angle θ indiqué sur la vue de dessus de la figure de gauche. Sollicité en torsion, le fil exerce un couple de rappel de moment $\overrightarrow{\Gamma} = -C\theta\vec{u}_z$. Nous négligeons tout frottement et cherchons à déterminer la constante de torsion C.

Le calcul précis du moment d'inertie J_0 par rapport à l'axe de rotation du solide constitué par le cylindre et le mandrin n'étant pas possible, on utilise la méthode de la surcharge qui consiste à placer sur le disque un anneau de moment d'inertie $J_1 = 1{,}0 \times 10^{-2}\,\text{kg}\,\text{m}^2$ par rapport à l'axe de rotation.

1. Déterminer la période T_0 des oscillations du pendule en l'absence de la surcharge.
2. Déterminer la période T_1 des oscillations du pendule avec la surcharge.
3. Montrer qu'il est possible de déterminer C sans connaître le moment d'inertie J_0.
4. Les mesures donnent $T_0 = 1{,}0\,\text{s}$ et $T_1 = 1{,}7\,\text{s}$. Déterminer C.

Résolution de problème : Comment différencier un œuf dur d'un œuf cru sans le casser ?

Solutions des exercices

[1] *Réponses : 1)* $\ddot{\theta} + (\frac{C}{ml} - g)\frac{\theta}{l} = 0$, $\frac{C}{ml} > g$; *2)* $dg = 2(G-g)\frac{dT}{T} = 0,01 m.s^{-2}$; *3)* $dg' = 0,02\ m.s^{-2}$

[2] *Réponses : 1)* $J_\Delta \frac{d\omega}{dt} = \Gamma_0 - k\omega$; *2)* $\omega = \omega_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$; *4)* $e(t) = \frac{\eta}{\sqrt{1+\Omega^2\tau^2}}\cos(\Omega t - \psi)$ *avec* $\psi = -\arctan(\Omega\tau)$

[3] *Réponses : 1)* $W(\overrightarrow{T}) = 20.10^2\ J$ *et* $W(\overrightarrow{P}) = -4.10^3\ J$; *2)* $v_c^- = 1,3\ m.s^{-1}$ *et* $v_c^+ = 1,2\ m.s^{-1}$; $H = 10,3\ cm$

[4] *Réponses : 1)* $\dot{\theta}^2 = \frac{6ge(1-\cos\theta)}{a^2+4e^2}$, $\ddot{\theta} = \frac{3ge}{a^2+4e^2}\sin\theta$; *2)* $J_{oy}\ddot{\theta} = \frac{1}{3}m(a^2+4e^2)\ddot{\theta} = mge\sin\theta$; *3)*$\theta_0 = \arctan f = \frac{\pi}{4}$; *4)* $z_G = -\frac{1}{2}gt^2$; *5)* $\tau = \sqrt{\frac{2h}{g}}$; *6)* $\theta(\tau) = 190\,°$

[5] *Réponses : 1)* $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{J_0}{C}}$; *2)* $C = \dfrac{4\pi^2 J_1}{T_1^2 - T_0^2}$; *3)*$C = 0{,}21\,\text{N}\,\text{m}\,\text{rad}^{-1}$