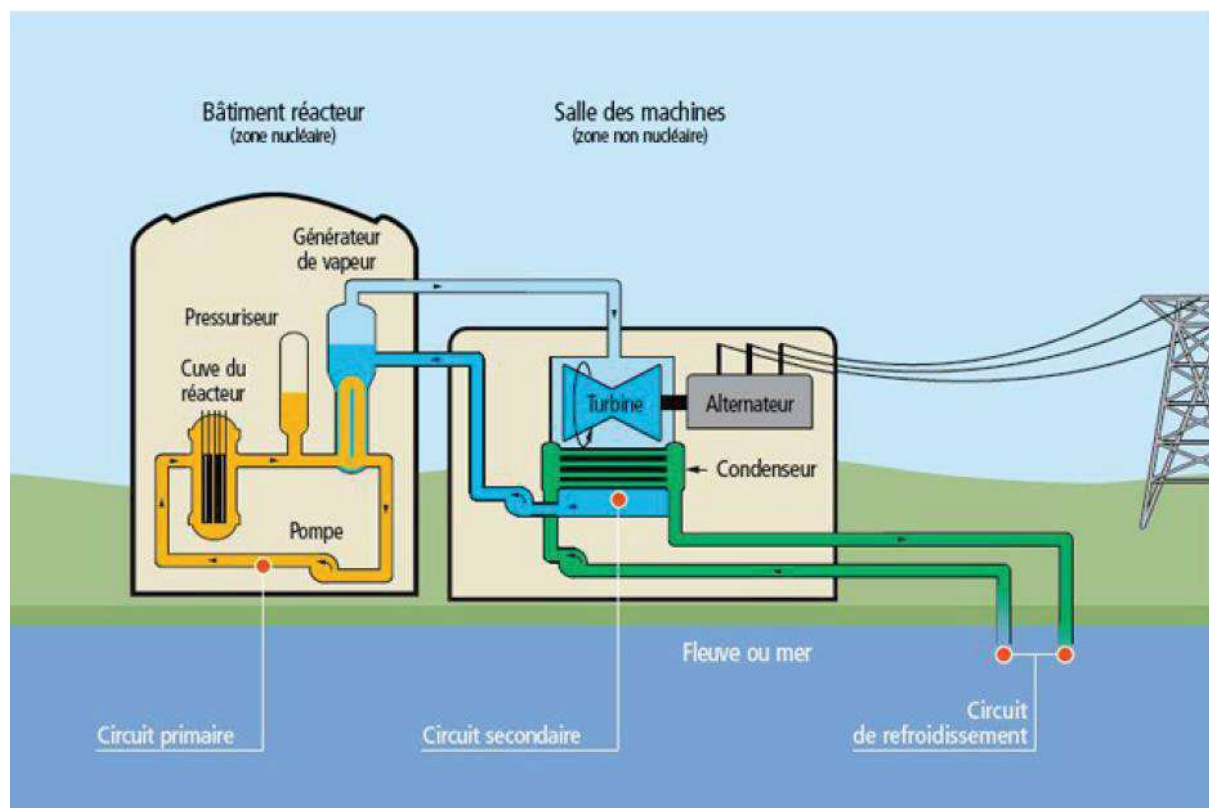


## Problème 1 : Etude d'une installation nucléaire REP

La France compte 19 centrales nucléaires en exploitation, dans lesquelles tous les réacteurs (58 au total) sont des réacteurs à eau pressurisée. Actuellement, ces installations produisent près de 80% de l'électricité produite en France. Chaque centrale est soumise à un référentiel de normes de sûreté et de sécurité évoluant en fonction des enseignements des incidents passés nationaux ou internationaux.

Le but de ce problème est d'étudier quelques aspects liés au fonctionnement d'une centrale nucléaire REP.



**Figure 1** Schéma global d'une centrale nucléaire

Une centrale nucléaire est un site industriel destiné à la production d'électricité, qui utilise comme chaudière un réacteur nucléaire pour produire de la chaleur. Une centrale nucléaire REP (Réacteur à Eau Pressurisée) est constituée de deux grandes zones (voir figure 1) :

- une zone non nucléaire (salle des machines). Dans cette partie, semblable à celle utilisée dans les centrales thermiques classiques, s'écoule de l'eau dans un circuit secondaire. Cette eau est évaporée dans le Générateur de Vapeur (GV) par absorption de la chaleur produite dans la zone nucléaire, puis elle entraîne une turbine (T) couplée à un alternateur produisant de l'électricité, ensuite elle est condensée au contact d'un refroidisseur (rivière ou mer ou atmosphère via une tour aérorefrigérante) et enfin, elle est comprimée avant d'être renvoyée vers le générateur de vapeur ;
- une zone nucléaire (dans le bâtiment réacteur), où ont lieu les réactions nucléaires de fission, qui produisent de l'énergie thermique et chauffent ainsi l'eau sous pression circulant dans le circuit primaire. Le transfert d'énergie thermique entre le circuit primaire et le circuit secondaire se fait dans le générateur de vapeur, où la surface d'échange entre les deux fluides peut atteindre près de  $5000 \text{ m}^2$  (réseau de tubulures).

Considérons une centrale nucléaire REP produisant une puissance électrique  $P_e = 900 \text{ MW}$ . Le fluide circulant dans le circuit secondaire est de l'eau, dont l'écoulement est supposé stationnaire. Le cycle thermodynamique décrit par l'eau est un cycle ditherme moteur. L'eau liquide sera supposée

incompressible et de capacité thermique massique isobare supposée constante. Le tableau en fin d'énoncé donne diverses données thermodynamiques relatives à l'équilibre liquide–vapeur de l'eau.

**Données :** Extrait de table thermodynamique relatif à l'équilibre liquide–vapeur de l'eau

$\theta$ (°C)	$P_{\text{sat}}$ (bar)	Liquide saturant			Vapeur saturante sèche		
		$v_l$ (m <sup>3</sup> .kg <sup>-1</sup> )	$h_l$ (kJ.kg <sup>-1</sup> )	$s_l$ (J.K <sup>-1</sup> .kg <sup>-1</sup> )	$v_v$ (m <sup>3</sup> .kg <sup>-1</sup> )	$h_v$ (kJ.kg <sup>-1</sup> )	$s_v$ (J.K <sup>-1</sup> .kg <sup>-1</sup> )
30	0,043	1,0047	125,22	0,4348	32,892	2555,92	8,4530
180	10	1,1276	763,18	2,1395	0,119404	2777,84	6,5854
270	55	1,3053	1190,10	2,9853	0,03505	2788,46	5,9226

$\theta$  température

$P_{\text{sat}}$  pression de vapeur saturante

$v_l$  volume massique du liquide saturant

$h_l$  enthalpie massique du liquide saturant

$s_l$  entropie massique du liquide saturant

$v_v$  volume massique de la vapeur saturante sèche

$h_v$  enthalpie massique de la vapeur saturante sèche

$s_v$  entropie massique de la vapeur saturante sèche

Capacité thermique massique isobare de l'eau :  $c = 4,18 \text{ kJ.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$

### A. Cycle de Carnot

Dans une première approche simplifiée, on considère le moteur ditherme de Carnot fonctionnant de manière réversible entre deux sources de température  $T_{\text{ch}}$  et  $T_{\text{fr}}$  ( $T_{\text{fr}} < T_{\text{ch}}$ ).

1) Donner, en la redémontrant, l'expression du rendement de Carnot associé à ce cycle.

2) Donner la valeur numérique de ce rendement en prenant  $T_{\text{ch}} = 543 \text{ K}$  et  $T_{\text{fr}} = 303 \text{ K}$ , les deux températures extrêmes de l'eau dans le circuit secondaire.

3) Sachant qu'un réacteur REP fournit à l'eau du circuit secondaire, via le générateur de vapeur, une puissance thermique  $P_t = 2785 \text{ MW}$ , que vaut le rendement thermodynamique réel de l'installation ? On supposera que la puissance mécanique transmise à la turbine est intégralement convertie en puissance électrique. Commenter.

### B. Cycle de Rankine

L'eau du circuit secondaire subit les transformations suivantes (représentées dans la figure 2)

- de  $A$  à  $B$  : dans le générateur de vapeur, échauffement isobare du liquide à la pression  $P_2 = 55 \text{ bar}$  jusqu'à un état de liquide saturant (état noté  $A'$ ), puis vaporisation totale isobare jusqu'à un état de vapeur saturante sèche (état  $B$ ) ;
- de  $B$  à  $C$  : détente adiabatique réversible dans la turbine, de la pression  $P_2$  à la pression  $P_1 = 43 \text{ mbar}$  ;
- en  $C$ , le fluide est diphasé ;
- de  $C$  à  $D$  : liquéfaction totale isobare dans le condenseur, jusqu'à un état de liquide saturant ;
- de  $D$  à  $A$  : compression adiabatique réversible, dans la pompe d'alimentation, de la pression  $P_1$  à la pression  $P_2$ , du liquide saturant sortant du condenseur. On négligera le travail consommé par cette pompe devant les autres énergies mises en jeu.

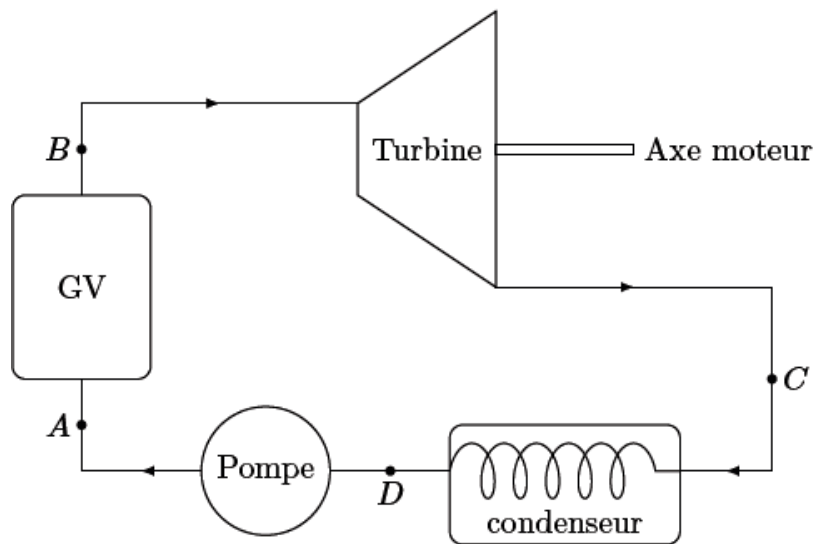


Figure 2 Cycle de Rankine

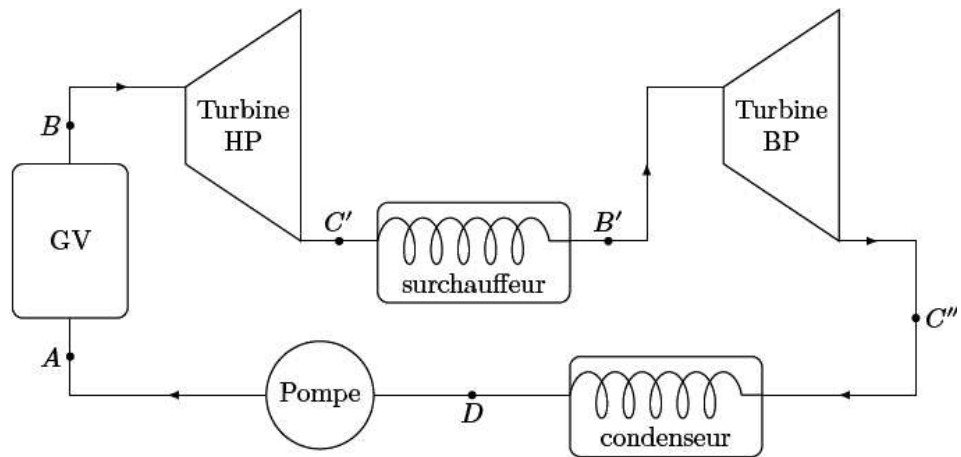
- 1) Représenter dans le diagramme de Clapeyron ( $P, v$ ) l'allure de la courbe de saturation de l'eau, ainsi que les isothermes  $T_B$ ,  $T_D$  et  $T_{\text{critique}}$ , cette dernière température étant celle du point critique de l'eau. Préciser les domaines du liquide, de la vapeur, de la vapeur saturante. Représenter sur ce même diagramme l'allure du cycle décrit par l'eau du circuit secondaire. Indiquer le sens de parcours du cycle et placer les points  $A, A', B, C$  et  $D$ .
- 2) D'après l'extrait de table thermodynamique donné en fin d'énoncé, quelles sont les valeurs des températures, des enthalpies massiques et des entropies massiques aux points  $A', B$  et  $D$ ? On pourra donner les valeurs sous forme de tableau.
- 3) Dans le document réponse figure le diagramme enthalpique ( $P, h$ ) de l'eau. Placer, avec soin et à l'échelle, les points  $A', B, C, D$  du cycle. On explicitera la méthode.
- 4) Dans toute la suite, on négligera les variations d'énergie cinétique et potentielle dans les bilans énergétiques. Exprimer alors, sans démonstration, le premier principe de la thermodynamique pour un fluide en écoulement stationnaire recevant de manière algébrique le travail massique utile  $w_u$  et le transfert thermique massique  $q$ .
- 5) Exprimer le travail massique  $w_{BC}$  reçu par l'eau dans la turbine. Donner sa valeur numérique, en s'aidant du diagramme enthalpique.
- 6) Exprimer le transfert thermique massique  $q_{AA'}$  reçu par l'eau liquide quand elle passe de manière isobare de la température  $T_A$  à la température  $T_{A'}$  dans le générateur de vapeur. Donner sa valeur numérique : on considérera  $T_A \approx T_D$ .
- 7) Exprimer le transfert thermique massique  $q_{A'B}$  reçu par l'eau quand elle se vaporise complètement dans le générateur de vapeur. Donner sa valeur numérique.
- 8) Calculer alors le rendement de Rankine de l'installation. Comparer au rendement de Carnot et commenter. Comparer au rendement réel et commenter.
- 9) Dans quel état se trouve l'eau à la fin de la détente de la turbine ? Donner le titre massique en vapeur à l'aide du diagramme enthalpique. En quoi est-ce un inconvénient pour les parties mobiles de la turbine ?

### C. Cycle de Rankine avec détente étagée

Le cycle réel est plus compliqué que celui étudié précédemment (voir figure 3). En effet, d'une part, la détente est étagée : elle se fait d'abord dans une turbine « haute pression » puis dans une turbine « basse pression ». D'autre part, entre les deux turbines, l'eau passe dans un « surchauffeur ». Les transformations sont maintenant modélisées par :

- de  $A$  à  $B$  : dans le générateur de vapeur, échauffement isobare du liquide à la pression  $P_2 = 55$  bar, jusqu'à un état de liquide saturant (état noté  $A'$ ), puis vaporisation totale isobare jusqu'à un état de vapeur saturante sèche (point  $B$ ) ;
- de  $B$  à  $C'$  : détente adiabatique réversible dans la turbine « haute pression », de la pression  $P_2$  à la pression  $P_3 = 10$  bar ;

- de  $C'$  à  $B'$  : échauffement isobare à la pression  $P_3$ , dans le surchauffeur, jusqu'à un état de vapeur saturante sèche (point  $B'$ ) ;
- de  $B'$  à  $C''$  : détente adiabatique réversible dans la turbine « basse pression », de la pression  $P_3$  à la pression  $P_1 = 43$  mbar ;
- de  $C''$  à  $D$  : liquéfaction totale isobare dans le condenseur, jusqu'à un état de liquide saturant ;
- de  $D$  à  $A$  : compression adiabatique réversible, dans la pompe d'alimentation, de la pression  $P_1$  à la pression  $P_2$ , du liquide saturant sortant du condenseur. On négligera le travail consommé par cette pompe devant les autres énergies mises en jeu.



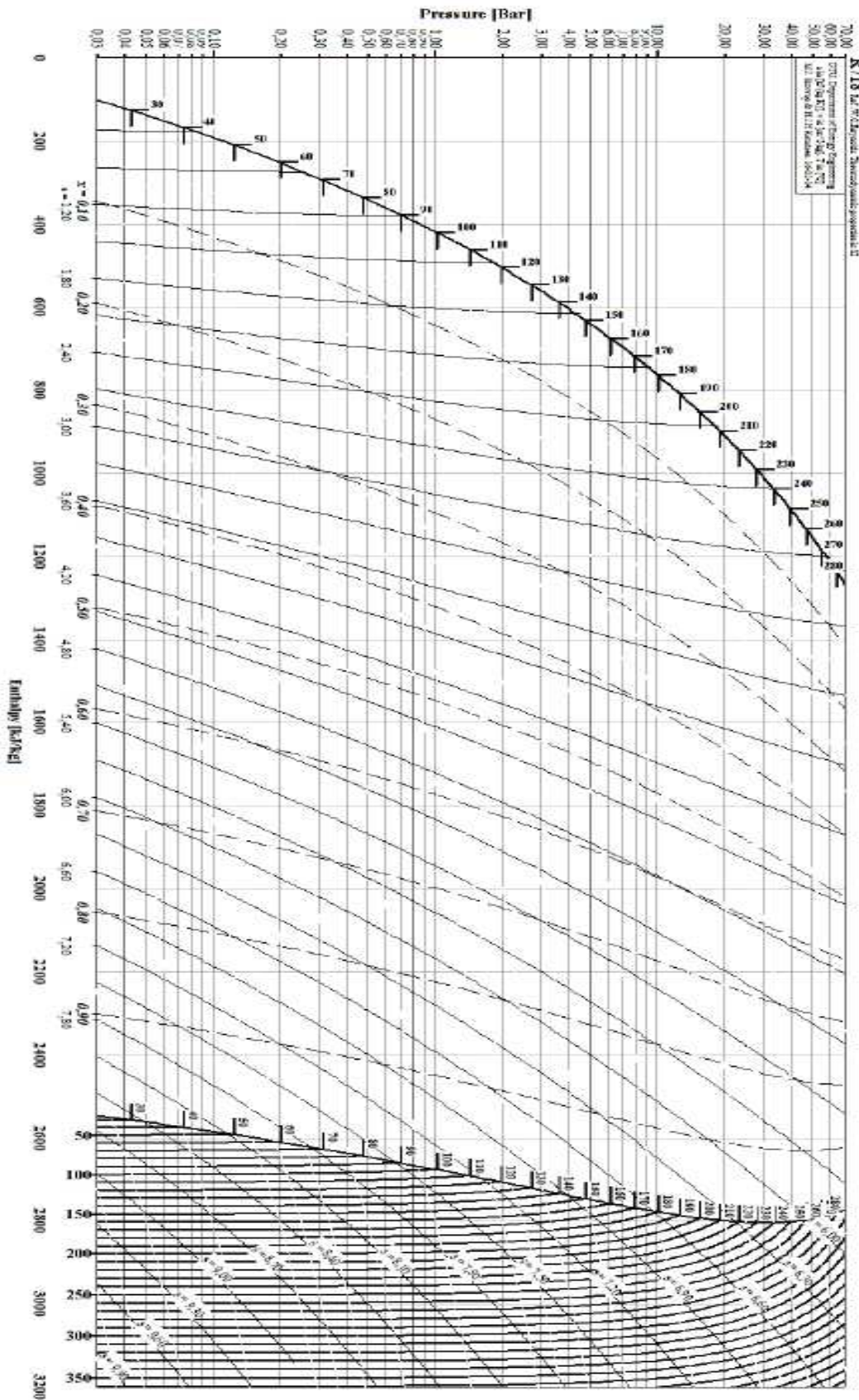
**Figure 3** Cycle de Rankine avec une détente étagée

- 1) Placer les nouveaux points  $C'$ ,  $B'$ ,  $C''$  sur le diagramme enthalpique du document réponse.
- 2) Comparer les titres massiques en vapeur des points  $C'$  et  $C''$  au titre massique en vapeur du point  $C$ . Quel est l'intérêt de la surchauffe ?
- 3) À l'aide du diagramme enthalpique, déterminer le nouveau rendement du cycle. Commenter.

# Document à rendre avec la copie

Nom : .....

Prénom : .....



## Problème 2 : Forces centrales

Un atome d'hydrogène dans son état fondamental peut absorber un rayonnement électromagnétique de longueur d'onde  $\lambda = 21 \text{ cm}$ , c'est ce que l'on appelle usuellement la raie  $HI$  à 21 cm. Pour interpréter l'origine de cette raie, il faut mener une étude complète de l'atome d'hydrogène dans le cadre de la théorie de Dirac (mécanique quantique relativiste). Nous pouvons cependant comprendre qualitativement l'origine de la raie  $HI$  à partir des quelques notions simples évoquées dans ce qui suit.

### I. Etude classique de l'atome d'hydrogène

L'étude qui suit sera menée dans le référentiel  $R$  centré sur le proton, ce référentiel sera considéré comme galiléen. On désigne par  $r$  la distance entre le proton et l'électron et le moment cinétique de l'électron par rapport à l'origine dans le référentiel  $R$  sera noté  $\vec{L}$ .

- Q.1** Rappeler l'expression de la force électrostatique  $\vec{F}$  exercée par le proton sur l'électron.  
**Q.2** En déduire l'expression de l'énergie potentielle électrostatique  $E_p$  de l'électron, en choisissant le zéro de cette énergie potentielle quand  $r \rightarrow \infty$ .  
**Q.3** Montrer que le mouvement de l'électron est plan.  
**Q.4** Déterminer l'énergie mécanique  $E$  de l'électron et la mettre sous la forme :

$$E = \frac{1}{2} m_e \cdot \dot{r}^2 + E_{peff}(r)$$

Où  $E_{peff}(r)$  est une fonction de  $r$  à expliciter en fonction des paramètres du problème et du moment cinétique orbital  $L$  de l'électron.

- Q.5** Donner l'allure de la représentation graphique de  $E_{peff}(r)$ . Analyser qualitativement le comportement du système pour différentes valeurs de l'énergie mécanique  $E$ .  
**Q.6** A quelle condition une orbite circulaire est-elle possible ? Montrer que le rayon  $r_0$  de l'orbite circulaire a pour expression :

$$r_0 = \frac{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot L^2}{m_e \cdot e^2}$$

Etablissez l'expression de l'énergie mécanique  $E$  de l'électron décrivant une telle orbite en fonction de  $L$ ,  $e$ ,  $m_e$  et  $\epsilon_0$ .

- Q.7** Quelle serait la trajectoire de l'électron si  $L = 0$  ?

### II. Le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène

En 1913 Niels Bohr proposa un modèle « semi-classique » de l'atome d'hydrogène, dans ce modèle l'électron se trouve sur une orbite circulaire de rayon  $r$  et son moment cinétique orbital est quantifié par :

$$L = n \frac{h}{2 \cdot \pi} = n \cdot \hbar$$

où  $n$  est un nombre entier strictement positif et  $h$  la constante de Planck.

- Q.8** Montrer que les orbites sont quantifiées (pour cela, exprimer le rayon  $r$  de la trajectoire de l'électron en fonction des données et de  $n$ ). Déterminer la valeur du rayon  $a_0$  de la première orbite de Bohr (c.à.d. pour  $n = 1$ ).  
**Q.9** En déduire que les niveaux d'énergie sont quantifiés. Donner la valeur (en eV) de l'énergie de l'état fondamental.  
**Q.10** Rappeler l'expression de l'énergie cinétique moyenne de translation d'un atome en fonction de la température. A quelle température l'énergie d'agitation thermique d'un atome d'hydrogène est-elle comparable à son énergie d'ionisation ? Commenter.  
**Q.11** L'atome d'hydrogène dans son état fondamental est susceptible d'absorber ou d'émettre un rayonnement de longueur d'onde proche de  $\lambda = 21 \text{ cm}$ . Le modèle de Bohr permet-il de comprendre l'origine de cette transition ?

### III. La structure hyperfine de l'atome d'hydrogène

Pour comprendre l'origine de la raie HI il faut étudier les interactions magnétiques entre le proton et l'électron. Afin d'en obtenir un ordre de grandeur, nous allons étudier ici l'interaction entre le dipôle magnétique associé au spin de l'électron et le dipôle magnétique associé au spin du proton, qui est appelée « interaction spin-spin ».

**Q.12** On rappelle que le moment magnétique d'une boucle de courant est donné par :  $\vec{M} = i \cdot \vec{S}$  avec  $i$  intensité du courant et  $\vec{S}$  vecteur surface orienté par la boucle de courant. Dans le cadre du modèle planétaire classique de l'atome d'hydrogène, montrer que le moment magnétique  $\vec{M}_0$  de l'électron sur une orbite circulaire est proportionnel à son moment cinétique orbital  $\vec{L}$  :  $\vec{M}_0 = \gamma_0 \cdot \vec{L}$  avec

$$\gamma_0 = -\frac{e}{2 \cdot m_e}$$

Le résultat précédent est encore vrai en théorie quantique : le moment magnétique d'une particule quantique est proportionnel à son moment cinétique. En outre, dans une théorie quantique relativiste chaque particule élémentaire possède un spin qui est interprété comme son moment cinétique intrinsèque. En généralisant le résultat précédent, elle possède aussi un moment magnétique intrinsèque (ou moment magnétique de spin) qui est proportionnel à son spin. Ainsi :

- L'électron, de spin  $\vec{S}_e$  possède un moment magnétique  $\vec{M}_e$  proportionnel à son spin :

$$\vec{M}_e = -g_s \left( \frac{e}{2 \cdot m_e} \right) \cdot \vec{S}_e$$

où  $g_s \approx 2,00$ .

- Le proton de masse  $m_p$  et de spin  $\vec{S}_p$  possède un moment magnétique se spin :

$$\vec{M}_p = g_p \left( \frac{e}{2 \cdot m_p} \right) \cdot \vec{S}_p$$

où  $g_p \approx 5,58$ . Les facteurs  $g_s$  et  $g_p$  sont appelés « facteurs de Landé » de l'électron et du proton.

- L'expression du champ magnétique créé en un point  $P$  (différent de  $O$ ) par un moment magnétique ponctuel  $\vec{M}$  placé en  $O$  est (champ magnétique de type dipolaire) :

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi \cdot r^3} (2 \cdot M \cdot \cos \theta \cdot \vec{u}_r + M \cdot \sin \theta \cdot \vec{u}_\theta)$$

où  $r = \|\vec{OP}\|$  et  $\vec{u}_r = \frac{\vec{OP}}{OP}$

**Q.13** On suppose que l'électron est sur l'orbite fondamentale de modèle de Bohr et on admet que le moment magnétique de spin  $\vec{M}_p$  est orthogonal au plan de l'orbite. Montrer que le champ magnétique  $\vec{B}$  créé par le proton sur l'électron est donné par :

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 \cdot g_p \cdot e}{8 \cdot \pi \cdot m_p \cdot a_0^3} \vec{S}_p$$

On rappelle que :

- l'énergie potentielle magnétique d'un dipôle magnétique de moment magnétique  $\vec{M}$  placé dans un champ magnétique  $\vec{B}$  se met sous la forme  $E_{PM} = -\vec{M} \cdot \vec{B}$ .
- une propriété remarquable du spin de l'électron (ou du proton) est que sa projection suivant une direction quelconque ne peut prendre que deux valeurs  $\hbar/2$  ou  $-\hbar/2$ .

**Q.14** A partir des éléments précédents, montrer que l'état fondamental de l'hydrogène est formé de deux « sous-niveaux » d'énergie  $E_l$  et  $E_u = E_l + \Delta E$  (avec  $E_l < E_u$ ). On parle de « structure hyperfine » de l'état fondamental.

**Q.15** Donner l'expression, en fonction de  $g_s, g_p, e, m_e, m_p$  et  $a_0$  de la différence d'énergie  $\Delta E$  entre les deux sous-niveaux hyperfins à laquelle conduit ce modèle.

En fait, cette modélisation ne permet pas de déterminer correctement la structure hyperfine du niveau fondamental de l'atome d'hydrogène.... Un calcul quantique de la différence d'énergie  $\Delta E$  entre ces deux sous-niveaux conduit à :

$$\Delta E = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{8}{3} g_s \cdot g_p \cdot \frac{m_e}{m_p} \left( \frac{e \cdot \hbar}{2 \cdot m_e} \right)^2 \frac{1}{a_0^3}$$

**Q.16** Calculer la fréquence  $\nu_0$  et la longueur d'onde dans le vide  $\lambda_0$  du rayonnement électromagnétique absorbé ou émis lors d'une transition entre les deux sous-niveaux hyperfins. Commenter ce résultat. Dans quel domaine se situe cette raie ?

#### Données numériques

Constante de Planck	$h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$
Constante de Planck réduite	$\hbar = 1,054 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$
Célérité de la lumière dans le vide	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$
Permittivité du vide	$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$
Perméabilité du vide	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$
Charge élémentaire	$e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$
Masse de l'électron	$m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Masse du proton	$m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg} = 1836 m_e$
Facteur de Landé de l'électron	$g_s = 2,00$
Facteur de Landé du proton	$g_p = 5,58$
Magnéton de Bohr	$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9,27 \times 10^{-24} \text{ J}\cdot\text{T}^{-1}$
Constante de Boltzmann	$k = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$
Constante de gravitation	$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$
Parsec	$1 \text{ pc} = 3,09 \times 10^{16} \text{ m}$
Masse du Soleil	$M_\odot = 2,0 \times 10^{30} \text{ kg}$

### Problème 3 : Mécanique du solide

Un aspect fondamental de la gravitation est le principe d'équivalence. Introduit par Galilée au début de XVII<sup>ème</sup> siècle alors qu'il étudiait la chute des corps, il fut le point de départ du développement de la théorie de la gravitation. Un peu moins d'un siècle plus tard, Newton fut le premier à décrire l'interaction gravitationnelle par une formule. Il en déduisit la version la plus élémentaire du « principe d'équivalence faible » : la trajectoire d'un corps tombant en chute libre ne dépend ni de sa structure, ni de sa composition.

Si l'on sait aujourd'hui que la gravitation régit la dynamique des composantes de l'Univers (planètes, étoiles, galaxies,...), l'observation récente de l'expansion de l'Univers a conduit à se poser des questions fondamentales sur les théories de la gravitation classique. L'introduction dans la théorie cosmologique de l'énergie noire, qui serait la contribution énergétique majoritaire de l'Univers, permet d'expliquer certaines observations mais sa nature et ses propriétés restent principalement théoriques. Certaines extensions de la théorie de la gravitation suggèrent même l'existence d'une répulsion gravitationnelle entre matière et antimatière, nommé antigravité.

Cet exercice propose une description de l'expérience d'Eötvös ayant permis, dès la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle, de valider une version réduite du principe d'équivalence avec une grande précision pour l'époque.

#### I. Introduction

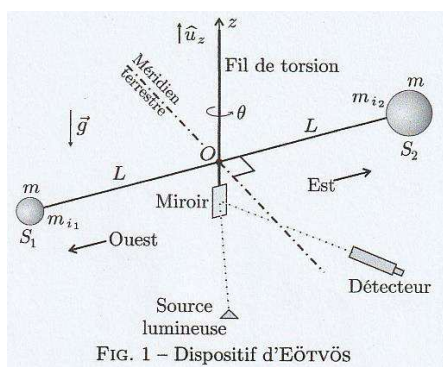
1) Qu'appelle-t-on « principe d'inertie » en mécanique ? Énoncer le principe fondamental de la mécanique dans un référentiel galiléen. La grandeur caractéristique du mobile étudié dans cette expression porte, ici et dans la suite, le nom de *masse inerte*  $m_i$ .

2) Expliciter la force de gravitation entre deux points matériels. On introduira le paramétrage nécessaire sur un schéma. La grandeur caractéristique du mobile intervenant dans cette expression porte le nom de *masse grave* ou *masse pesante*.

Quantifier les déviations possibles au principe d'équivalence faible suppose que l'on puisse considérer les masses inertielle  $m_i$  et grave (ou pesante)  $m$  comme pouvant être différentes. Les premières mesures précises des écarts relatifs entre masses inertielle et grave, ont été obtenues par comparaison des périodes de deux pendules simples de masse et de composition différentes ; cette méthode, d'abord décrite par Galilée, a été menée par Newton (1686) ou encore Bessel (1826) et a conduit à des valeurs d'écarts relatifs compris entre  $10^{-3}$  et  $10^{-5}$ . L'invention du pendule de torsion permet d'augmenter fortement la sensibilité.

## II. Mesure du coefficient de torsion du pendule

L'expérience d'Eötvös utilise un pendule de torsion. Dans le dispositif simplifié, représenté sur la figure 1, deux sphères appelées  $S_1$  et  $S_2$ , homogènes de nature différentes et de même masse pesante  $m$  ont leurs centres d'inertie placés aux extrémités d'une barre rigide, de masse  $M$  et de longueur  $2L$ , suspendues en son centre à un fil de quartz très fin de constante de torsion  $C$ . On note  $m_{i1}$  et  $m_{i2}$  les masses inertielles respectives de  $S_1$  et  $S_2$ . La barre est libre de tourner autour de l'axe  $Oz$  en tordant plus ou moins le ruban de suspension. On suppose que la barre reste tout le temps de l'expérience dans le plan orthogonal à l'axe  $Oz$ .



Le dispositif est placé de sorte qu'à l'équilibre, la barre soit normale au plan méridien à la latitude  $\lambda$ . Sa position est alors repérée par réflexion d'un faisceau lumineux sur un miroir plan, fixé au milieu de la barre, à l'aide d'une lunette. On note  $R$  le référentiel du laboratoire centré sur  $O$  et supposé galiléen dans cette sous-partie où l'objectif est la détermination de la constante de torsion  $C$  du pendule. On note  $J_0$  le moment d'inertie de la barre par rapport à l'axe vertical ( $Oz$ ) et  $J$  le moment d'inertie du système  $S = \{\text{barre} + \text{sphères}\}$  par rapport à ( $Oz$ ). On repère la position de la barre à l'instant  $t$  par l'angle de torsion  $\theta(t)$ . On fait tourner le système d'un angle  $\theta_m$  puis on le lâche sans vitesse

initiale. Le fil exerce alors sur la barre un couple de rappel dont le moment en  $O$  a pour intensité  $M_O = -C \cdot (\theta(t) - \theta_0)$ , l'angle  $\theta_0$  repère la position de la barre en l'absence de torsion.

3) Montrer que ce couple dérive d'une énergie potentielle que l'on déterminera. En déduire l'énergie potentielle  $E_{P,S}$  de  $S$  en fonction de  $C$  et  $\theta - \theta_0$ , on choisira  $E_{P,S}(\theta_0) = 0$ . Donner l'expression de l'énergie cinétique  $E_{C,S}$  du solide en fonction de  $J$  et de  $\omega = \dot{\theta}(t)$ . En déduire l'expression de l'énergie mécanique de  $S$  en fonction de  $C$ , de  $J$ ,  $\theta$ ,  $\theta_0$  et de  $\dot{\theta}$ .

4) On fait l'hypothèse que la puissance totale des forces de frottements peut se mettre sous la forme  $P_{frot} = -\alpha \cdot \dot{\theta}^2$  où  $\alpha$  est une constante positive. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par  $\theta(t)$  est :

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{J} \dot{\theta} + \frac{C}{J} \theta = \frac{C}{J} \theta_0$$

5) On observe des oscillations très faiblement amorties. Quelle est la condition satisfaite par les constantes  $J$ ,  $C$  et  $\alpha$  ? Préciser la forme de la solution sans déterminer l'expression exacte des deux constantes d'intégration. Quelle est la valeur  $\theta_\infty$  de  $\theta(t)$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ . Montrer que la pseudo-période  $T$  du mouvement est donnée par :

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \left( \frac{C}{J} - \frac{\alpha^2}{4J^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

6) Exprimer la pseudo-période  $T$  en fonction de la période propre  $T_0$  et de la constante  $\varepsilon = \frac{\alpha}{2\sqrt{J.C}}$ . Que devient cette expression dans l'hypothèse que  $\varepsilon \ll 1$ . On rappelle que pour  $x \ll 1$  :  $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha \cdot x + o(x)$  à l'ordre 1.

7) A quelle condition sur  $\varepsilon$ , l'erreur relative introduite par l'approximation  $T \sim T_0$  est-elle inférieure à 1 % ? Cette condition sera supposée vérifiée par la suite.

On note  $J_1$  les moments d'inertie, considérés égaux, de chacune des deux sphères par rapport à l'axe vertical passant par leurs centres respectifs. On admettra que si le principe d'équivalence faible s'applique alors  $J = J_0 + 2 \cdot J_1 + 2 \cdot m \cdot L^2$ . On mesure la période  $T$  des oscillations pour différentes valeurs de la longueur  $L$  avec des sphères de masse pesante  $m = 0,2 \text{ kg}$ . Les résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous :

$L$ [m]	$6,0 \cdot 10^{-2}$	$7,0 \cdot 10^{-2}$	$8,0 \cdot 10^{-2}$
$T$ [s]	436	509	581

8) En utilisant les résultats précédents, écrire la relation entre  $T^2, L^2, J_0, J_1, m$  et  $C$ . A partir des résultats de mesure donner une estimation de la valeur de la constante de torsion  $C$ . Compte tenu des ordres de grandeurs des différents termes intervenant dans l'expression de  $T$  montrer que l'on peut écrire :

$$m \approx \frac{C}{8 \cdot \pi^2} \frac{T^2}{L^2}$$

### III. Résultats et précision de l'expérience

Dans cette sous-partie le référentiel  $R$  du laboratoire centré sur  $O$  n'est plus galiléen et l'on prend en compte les éventuels effets de la rotation de la terre sur les masses inertes  $m_{i1}$  et  $m_{i2}$  à priori différentes des deux sphères.

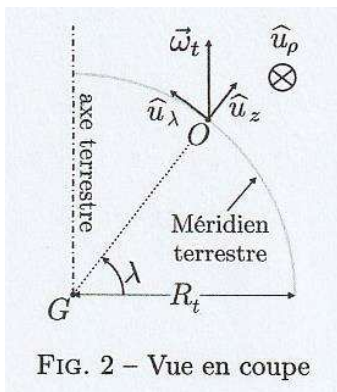


FIG. 2 - Vue en coupe

La terre est supposée en rotation uniforme à la vitesse  $\vec{\omega}_t$  autour de l'axe terrestre et le point  $O$  se trouve à la latitude  $\lambda$ . Une vue en coupe de la situation est représentée sur la figure 2.

L'ensemble constitué du pendule et du système optique est solidaire d'une plateforme. Lors d'une première mesure dans la configuration de la figure 1, on relève une valeur  $\theta_{\infty 1}$  pour l'équilibre du pendule. On fait alors tourner la plateforme d'un angle  $\pi$  afin d'inverser les positions des deux sphères, et l'on répète la mesure. On relève une valeur  $\theta_{\infty 2}$  pour l'équilibre du pendule dans cette nouvelle configuration.

Dans la première configuration, on montre que les forces d'inertie d'entraînement exercent respectivement les moments  $M_{Oi1}$  et  $M_{Oi2}$  sur le pendule :

$$\begin{cases} M_{Oi1} = m_{i1} \cdot \omega_t^2 \cdot L \cdot (R_T \cdot \cos \lambda) \cdot \sin \lambda \\ M_{Oi2} = -m_{i2} \cdot \omega_t^2 \cdot L \cdot (R_T \cdot \cos \lambda) \cdot \sin \lambda \end{cases}$$

9) En exploitant le théorème du moment cinétique à l'équilibre, montrer que :

$$\Delta\theta = \theta_{\infty 1} - \theta_{\infty 2} = \frac{R_T \cdot \omega_t^2 \cdot L \cdot \sin 2 \cdot \lambda \cdot (m_{i1} - m_{i2})}{C}$$

10) La lunette utilisée pour la mesure permet de détecter une déviation du faisceau lumineux de l'ordre de  $0,1 \text{ mm}$  à  $2,0 \text{ m}$  de distance. En utilisant l'expression de  $m$  trouvée à la question 8), déterminer la précision de la méthode en estimant le rapport  $\delta_m = \frac{|m_{i1} - m_{i2}|}{m}$ . On donne  $\lambda = 45^\circ$  et  $L = 6,0 \text{ cm}$ .

11) La déviation observée est nulle. Que déduire de ce résultat ?