

Problème 1 : Etude d'une installation nucléaire REP

A Cycle de Carnot

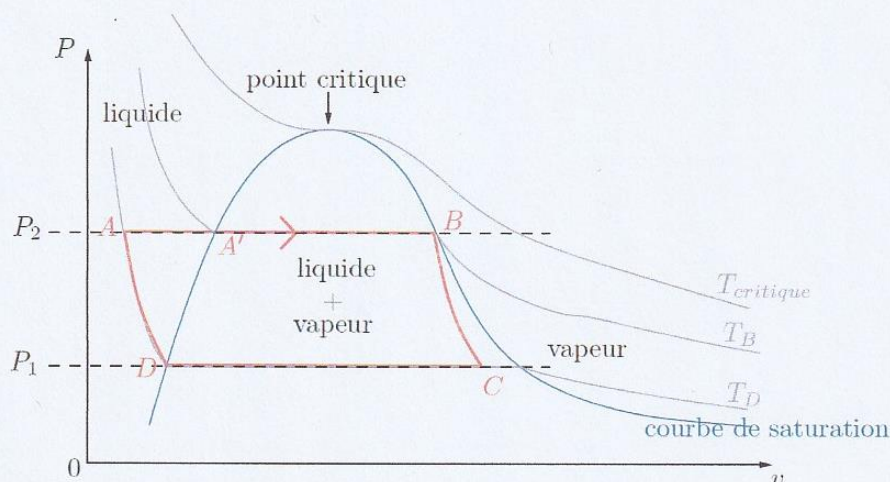
A.1 Soit le système constitué par le fluide en évolution cyclique du moteur ditherme. Notons W le travail algébriquement reçu, Q_{ch} le transfert thermique reçu de la part de la source chaude et Q_{fr} le transfert thermique reçu de la part de la source froide au cours d'un cycle. Par application du premier principe sur un cycle au système, on a : $\Delta U = W + Q_{ch} + Q_{fr} = 0$ car U , l'énergie interne du système, est une fonction d'état. L'application du second principe sur un cycle au système fournit : $\Delta S = S_e + S_c = \frac{Q_{fr}}{T_{fr}} + \frac{Q_{ch}}{T_{ch}} = 0$ car S , l'entropie du système, est une fonction d'état, et l'évolution est réversible ($S_c = 0$). L'expression du « rendement » pour un moteur est défini par : $\eta = \frac{-W}{Q_{ch}}$. Dans le cas du moteur ditherme de Carnot, on obtient l'expression $\eta = 1 - \frac{T_{fr}}{T_{ch}}$

A.2 L'application numérique donne : $\eta = 1 - \frac{T_{fr}}{T_{ch}} = 0,442$

A.3 $\eta_{reel} = \frac{P_e}{P_t} = 0,323$ ce qui est bien inférieur au rendement de Carnot.

B Cycle de Rankine

B.1

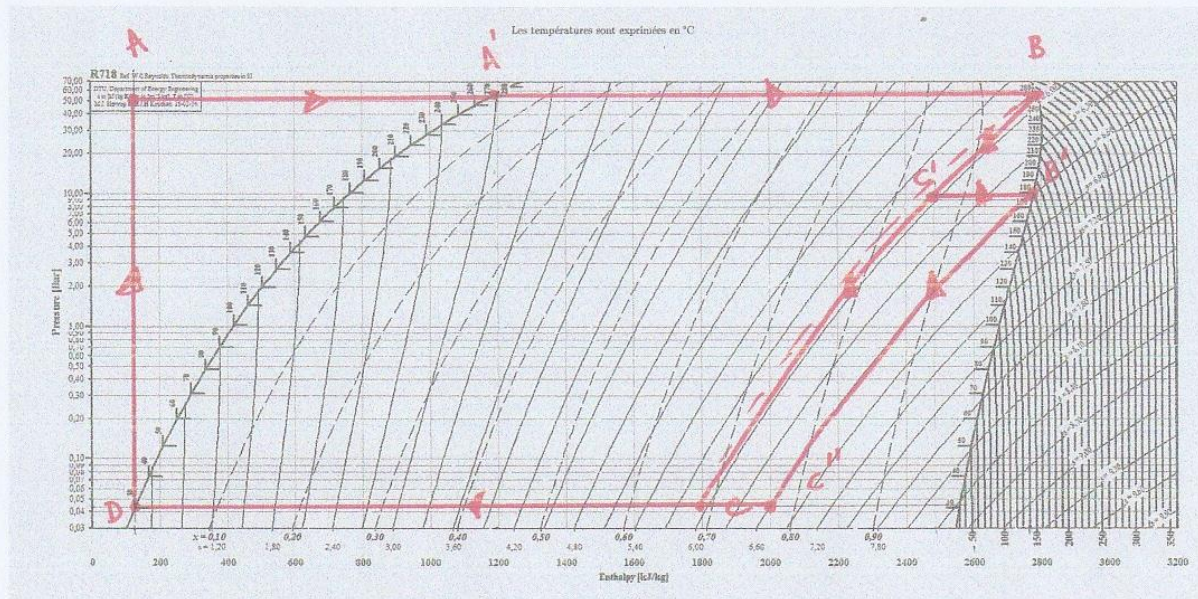


B.2 D'après l'extrait de table thermodynamique :

	P (bar)	θ ($^{\circ}\text{C}$)	h ($\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$)	s ($\text{kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$)
A'	55	270	$1,19\cdot 10^3$	2,99
B	55	270	$2,79\cdot 10^3$	5,92
D	$4,3\cdot 10^{-2}$	30	125	0,435

B.3 L'enthalpie massique de vaporisation est l'énergie qu'il faut apporter à une unité de masse pour faire passer le corps pur de l'état liquide à l'état gazeux à la température T . D'après la table précédente on obtient $\Delta h_{vap} = h_B - h_{A'} = 1,60\cdot 10^3 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$. La vaporisation étant réversible l'entropie de changement d'état s'écrit $\Delta s_{vap} = \frac{\Delta h_{vap}}{T_B}$. $\Delta s_{A'B} = s_B - s_{A'} = 2,94 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ et $\Delta s_{vap} = \frac{\Delta h_{vap}}{T_B} = 2,94 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$. On retrouve donc le même résultat.

B.4 De A' à B on a un changement d'état à la pression de 55 bar. BC suit une isentropique avec $P_C = 4,3 \cdot 10^{-2}$ bar. Entre C et D , on a une liquéfaction totale jusqu'au liquide saturant à la pression P_C .



B.5 Le premier principe de la thermodynamique pour un fluide en écoulement stationnaire recevant de manière algébrique le travail massique utile w_u et le transfert thermique massique q s'écrit $\Delta h = w_u + q$

B.6 L'évolution dans la turbine étant adiabatique, on a en utilisant le premier principe des systèmes en écoulement : $w_{BC} = h_C - h_B = -1,00 \cdot 10^3 \text{ kJ.kg}^{-1}$. ($h_C = 1,79 \cdot 10^3 \text{ kJ.kg}^{-1}$ par lecture graphique).

B.7 En considérant $T_A \approx T_D$, on a également $h_A = h_D = 125 \text{ kJ.kg}^{-1}$. De A à A' , l'évolution s'effectue sans travail utile, on a donc : $q_{AA'} = h_{A'} - h_A = 1,06 \cdot 10^3 \text{ kJ.kg}^{-1}$.

B.8 La transformation AA' est une transformation isobare en phase liquide : $q_{AA'} = h_{A'} - h_A = c_p(T_{A'} - T_A) = 1,00 \cdot 10^3 \text{ kJ.kg}^{-1}$. On obtient un résultat légèrement différent pouvant être interprété par une transformation DA légèrement différente d'une isenthalpique.

B.9 De A' à B , l'évolution s'effectue sans travail utile, on a donc : $q_{A'B} = h_{B'} - h_{A'} = 1,60 \cdot 10^3 \text{ kJ.kg}^{-1}$.

B.10 Le rendement du cycle de Rankine de l'installation s'exprime donc sous la forme : $\eta_{\text{Rankine}} = \frac{-w_{BC}}{q_{AA'} + q_{A'B}}$. On obtient $\eta_{\text{Rankine}} = 0,385$ en prenant la valeur trouvée à la question B8 ou $\eta_{\text{Rankine}} = 0,376$ en prenant le résultat de la question B7. Dans les deux cas on obtient un résultat inférieur au rendement de Carnot (cohérent) mais supérieur au rendement réel.

B.11 A la fin de la détente de la turbine, on a un état diphasé. En utilisant le théorème des moments et les informations des tables, on a $x_C = \frac{h_C - h_D}{h_v - h_D} = 0,685$ (On peut aussi utiliser l'isotitre voisin du point C). L'eau étant partiellement liquide, cela peut entraîner la corrosion des pièces métalliques constituant la turbine.

C Cycle de Rankine avec détente étagée

C.1 Voir diagramme ci-dessus.

C.2 En utilisant le théorème des moments $x_{C'} = \frac{h_{C'} - h_{\ell}(180)}{h_v(180) - h_{\ell}(180)} = 0,855$ ($h_{C'} = 2,485 \cdot 10^3 \text{ kJ.kg}^{-1}$) et $x_{C''} = \frac{h_{C''} - h_D}{h_v - h_D} = 0,767$ ($h_{C''} = 1,99 \cdot 10^3 \text{ kJ.kg}^{-1}$). Ces titres massiques sont supérieurs à x_C , l'intérêt de la surchauffe est donc de limiter la fraction liquide de l'eau lors de la détente pour limiter la corrosion de la turbine.

C.3 Le nouveau rendement s'écrit : $\eta_2 = \frac{-w_{BC'} + w_{B'C''}}{q_{AB} + q_{C'B'}}$ $= \frac{-h_{C'} + h_B + h_{C''} - h_{B'}}{h_B - h_A + h_{B'} - h_{C'}} = 0,369$. Le rendement pour le cycle de Rankine étagé est moins important que pour le cycle simple mais on limite les risques de corrosion. On ne peut plus comparer ce rendement au rendement de Carnot d'une machine ditherme, puisque ce cycle n'est plus ditherme...

Problème 2 : Forces centrales (extrait Centrale-Supélec PC 2018)

Q.1 : L'électron est soumis à la force électrostatique exercée par le proton, dont l'expression est donnée par la loi de Coulomb :

$$\vec{F} = \frac{-e^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \vec{u}_r$$

Q.2 : Le travail élémentaire de cette force est : $\delta w = \vec{F} \cdot d\vec{l} = -dE_P$. En explicitant :

$$\delta w = \frac{-e^2 \cdot dr}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} = -dE_P$$

Soit :

$$\frac{dE_P}{dr} = \frac{e^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2}$$

En primitivant :

$$E_P(r) = \frac{-e^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r} + A$$

Si on pose que $E_P(r) \rightarrow 0$ quand $r \rightarrow \infty$ alors $A \rightarrow 0$ et :

$$E_P(r) = \frac{-e^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r}$$

Q.3 : On assimile l'électron à un point matériel M de masse m_e observé dans le référentiel R de l'atome d'hydrogène supposé galiléen. Dans ce référentiel, M est soumis uniquement à la force d'interaction électrostatique $\vec{F} = F \cdot \vec{u}_r$ centrale. Appliquons le théorème du moment cinétique à M dans R :

$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt} \right)_R = \overline{OM} \wedge \vec{F} = r \cdot \vec{u}_r \wedge F \cdot \vec{u}_r = \vec{0}$$

On en déduit que : $\vec{L} = \overline{OM} \wedge \vec{p}(M)_R = \text{cte}$. Par définition du produit vectoriel, ceci implique que les vecteurs \overline{OM} et $\vec{p}(M)_R$ sont portés par un plan (π) orthogonal à \vec{L} , donc la trajectoire de l'électron est plane.

Q.4 : L'électron est soumis uniquement à la force \vec{F} qui est conservative donc l'énergie mécanique de l'électron dans le référentiel R est constante et donnée par :

$$E = E_C(M)_R + E_P(r) = \text{cte}$$

Sachant que la trajectoire de l'électron est plane, explicitons l'énergie cinétique en coordonnées polaires :

$$E_C(M)_R = \frac{1}{2} m_e \cdot v^2(M)_R = \frac{1}{2} m_e \cdot (\dot{r}^2 + (r \cdot \dot{\theta})^2)$$

En explicitant :

$$E = \frac{1}{2} m_e \cdot (\dot{r}^2 + (r \cdot \dot{\theta})^2) - \frac{e^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r}$$

Sachant que le moment cinétique est constant, explicitons \vec{L} en coordonnées polaires :

$$\vec{L} = \overline{OM} \wedge \vec{p}(M)_R = m_e \cdot r \cdot \vec{u}_r \wedge (\dot{r} \cdot \vec{u}_r + r \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta) = m_e \cdot r^2 \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{u}_z = \text{cte}$$

On en déduit que $L = \|\vec{L}\| = m_e \cdot r^2 \cdot \dot{\theta}$, soit :

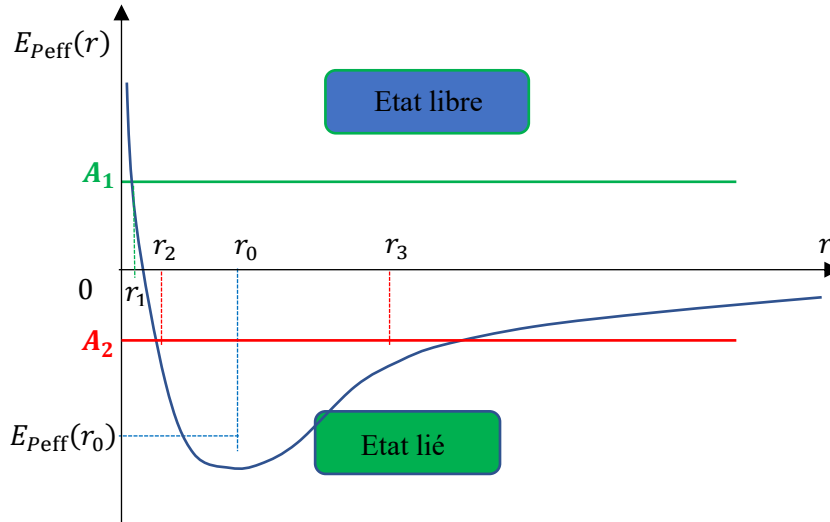
$$E = \frac{1}{2} m_e \cdot \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2 \cdot m_e \cdot r^2} - \frac{e^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r}$$

Par identification, on établit que :

$$E_{Peff}(r) = \frac{L^2}{2 \cdot m_e \cdot r^2} - \frac{e^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r}$$

Q.5 : Pour $r \rightarrow 0$, $E_{Peff}(r) \rightarrow \frac{L^2}{2 \cdot m_e \cdot r^2} \rightarrow \infty$. Pour $r \rightarrow \infty$, $E_{Peff}(r) \rightarrow -\frac{e^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r} \rightarrow 0^-$. On en déduit que la fonction $E_{Peff}(r)$ admet (au moins) un minimum pour : $\frac{dE_{Peff}(r)}{dr} = 0$.

Rq. : on vérifie qu'il n'y a qu'un minimum (cf question Q.6). Soit l'allure de la fonction $E_{Peff}(r)$:



Sachant que $\frac{1}{2} m_e \cdot \dot{r}^2 = E - E_{Peff}(r) \geq 0$ déterminons qualitativement la nature de la trajectoire de M est fonction de son énergie mécanique. Pour cela, posons $E = A = cte$.

- Pour $E = A_1 > 0$ on constate que $r \in [r_1, \infty[$: le système est dans un état libre (ou état de diffusion). Pour $r = r_1$ la vitesse radiale de M est nulle ($\dot{r} = 0$). On montre que cette configuration correspond à *une trajectoire hyperbolique*.
- Pour $E = A_2 < 0$ on constate que $r \in [r_2 ; r_3]$: le système est dans un état lié. Pour $r = r_2$ ou r_3 ; la vitesse radiale de M est nulle ($\dot{r} = 0$). On montre que cette configuration correspond à *une trajectoire elliptique*.
- Pour $E = E_{Peff}(r_0) : r = r_0$ la trajectoire de M est circulaire et uniforme (cf loi des aires : $r = cte$ alors $\dot{\theta} = \omega = cte$).
- Pour $E = 0$: le système est également dans un état de diffusion. Pour cette énergie mécanique, le système est à la frontière entre un état libre et un état lié, on montre que M décrit *une trajectoire parabolique*.

Q.6 : La trajectoire de M est circulaire pour $\left(\frac{dE_{Peff}(r)}{dr}\right)_{r_0} = 0$. Explicitons :

$$\frac{dE_{Peff}(r)}{dr} = -\frac{L^2}{m_e \cdot r^3} + \frac{e^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2}$$

Avec $\left(\frac{dE_{Peff}(r)}{dr}\right)_{r_0} = 0$:

$$-\frac{L^2}{m_e \cdot r_0^3} + \frac{e^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r_0^2} = 0 \quad (1)$$

On établit que :

$$r_0 = \frac{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot L^2}{m_e \cdot e^2} \quad (2)$$

Pour une trajectoire circulaire ($\dot{r} = 0$), l'énergie mécanique de l'électron est :

$$E = \frac{L^2}{2 \cdot m_e \cdot r_0^2} - \frac{e^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r_0}$$

En posant (avec la relation (1)) que :

$$\frac{e^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r_0} = \frac{L^2}{m_e \cdot r_0^2}$$

On peut exprimer l'énergie mécanique sous la forme :

$$E = \frac{L^2}{2 \cdot m_e \cdot r_0^2} - \frac{L^2}{m_e \cdot r_0^2} = -\frac{L^2}{2 \cdot m_e \cdot r_0^2}$$

En explicitant r_0 :

$$E = -\frac{m_e \cdot e^4}{32 \cdot \pi^2 \cdot \epsilon_0^2 \cdot L^2} \quad (3)$$

Q.7 : Si le moment cinétique de l'électron était nul : $L = m_e \cdot r^2 \cdot \dot{\theta} = 0$. Alors par définition $\theta(t) =$ cte : la trajectoire de l'électron serait rectiligne.

Q.8 : Avec la relation (2) on établit que :

$$r_n = \frac{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot L^2}{m_e \cdot e^2} = \frac{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot (n \cdot \hbar)^2}{m_e \cdot e^2}$$

Soit :

$$r_n = n^2 \cdot a_0 \text{ avec } a_0 = \frac{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \hbar^2}{m_e \cdot e^2}$$

A.N. : $a_0 = 53,0 \text{ pm}$

Q.9 : Avec la relation (3) on vérifie que les niveaux d'énergie sont quantifiés :

$$E_n = -\frac{m_e \cdot e^4}{32 \cdot \pi^2 \cdot \epsilon_0^2 \cdot (n \cdot \hbar)^2} = -\frac{E_1}{n^2}$$

En notant E_1 énergie du niveau fondamental :

$$E_1 = -\frac{m_e \cdot e^4}{32 \cdot \pi^2 \cdot \epsilon_0^2 \cdot \hbar^2}$$

A.N. : $E_1 = -2,17 \cdot 10^{-18} \text{ J} = -13,6 \text{ eV}$.

Q.10 : L'énergie cinétique moyenne de translation d'un atome en fonction de la température est donnée par le théorème d'équipartition :

$$\langle E_{c,trans} \rangle = \frac{3}{2} k_B \cdot T$$

L'énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène (pris dans son état fondamental) est :

$$E_{ion} = E_{\infty} - E_1 = -E_1$$

Pour que l'énergie cinétique d'agitation soit comparable à l'énergie d'ionisation de l'atome, il faut une température T qui vérifie que :

$$\frac{3}{2} k_B \cdot T = -E_1$$

Soit :

$$T = -\frac{2 \cdot E_1}{3 \cdot k_B}$$

A.N. : $T = 105 \cdot 10^3 \text{ K}$

Q.11 : La longueur d'onde $\lambda = 21 \text{ cm}$ est très « grande ». Ceci suppose qu'elle résulte d'une variation de niveau d'énergie ΔE relativement faible pour l'atome d'hydrogène. Dans son état fondamental, la plus petite variation d'énergie est donnée par :

$$\Delta E = E_2 - E_1 = E_1 \cdot \left(\frac{1}{2^2} - 1 \right) = \frac{h \cdot c}{\lambda_{max}}$$

Soit :

$$\lambda_{max} = -\frac{4 \cdot h \cdot c}{3 \cdot E_1}$$

A.N. : $\lambda_{max} = 122 \text{ nm}$. On constate que ce modèle ne permet pas de justifier la présence de la raie HI à 21 cm de l'atome d'hydrogène.

Q.12 : Dans le modèle planétaire de Bohr, l'électron décrit une trajectoire circulaire et uniforme autour du proton. Soit T sa période, l'intensité (moyenne) du courant résultant est donné par :

$$i = \frac{-e}{T}$$

En posant que la surface « de la boucle de courant » est $S = \pi \cdot r^2$ avec r rayon de la trajectoire de l'électron, on établit que :

$$\vec{M}_0 = \left(-\frac{e}{T} \right) \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \vec{u}_z = -\frac{\omega \cdot r^2 \cdot e}{2} \vec{u}_z$$

avec \vec{u}_z vecteur unitaire normal à la « boucle de courant ». Sachant que $\vec{L} = m_e \cdot r^2 \cdot \omega \cdot \vec{u}_z$ (avec $\dot{\theta} = \omega$), on vérifie que $\vec{M}_0 = \gamma_0 \cdot \vec{L}$ avec :

$$\gamma_0 = -\frac{e}{2 \cdot m_e}$$

Q.13 : L'électron étant dans le plan équatorial du moment magnétique \vec{M}_p donc l'angle $\theta = \frac{\pi}{2}$ (cf cours sur l'induction, chap I, III-2). On en déduit que :

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi \cdot r^3} \left(2 \cdot M_p \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \vec{u}_r + M_p \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \vec{u}_\theta \right)$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot M_p}{4 \cdot \pi \cdot a_0^3} (-\vec{u}_z)$$

avec $\vec{u}_\theta = -\vec{u}_z$ pour $\theta = \frac{\pi}{2}$

En explicitant $\vec{M}_p = g_s \left(\frac{e}{2 \cdot m_p} \right) \cdot \vec{S}_p$ on vérifie que :

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 \cdot g_p \cdot e}{8 \cdot \pi \cdot m_p \cdot a_0^3} \vec{S}_p$$

Q.14 : L'énergie potentielle d'interaction de l'électron (de moment magnétique $\vec{M}_e = -g_s \left(\frac{e}{2m_e}\right) \cdot \vec{S}_e$) avec le champ magnétique \vec{B} créé par le spin du proton est :

$$E_{PM} = -\vec{M}_e \cdot \vec{B}$$

En explicitant :

$$E_{PM} = -\frac{\mu_0 \cdot g_p \cdot g_s \cdot e^2}{16 \cdot \pi \cdot m_p \cdot m_e \cdot a_0^3} (\vec{S}_p \cdot \vec{S}_e)$$

Selon que les deux spins soient parallèles ou anti-parallèles :

$$\vec{S}_p \cdot \vec{S}_e = \pm \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2$$

On en déduit que :

$$E_{PM} = \pm \frac{\mu_0 \cdot g_p \cdot g_s \cdot e^2}{16 \cdot \pi \cdot m_p \cdot m_e \cdot a_0^3} \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2$$

Le niveau fondamental est bien formé de deux sous-niveaux... $E_l = E_1 - \frac{\Delta E}{2}$ et $E_u = E_1 + \frac{\Delta E}{2} = E_l + \Delta E$ avec $\Delta E = 2 \cdot |E_{PM}|$.

Q.15 : L'intervalle d'énergie entre ces deux sous niveau est donc :

$$\Delta E = \frac{\mu_0 \cdot g_p \cdot g_s \cdot e^2}{8 \cdot \pi \cdot m_p \cdot m_e \cdot a_0^3} \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 = \frac{\mu_0 \cdot g_p \cdot g_s \cdot e^2 \cdot \hbar^2}{32 \cdot \pi \cdot m_p \cdot m_e \cdot a_0^3}$$

Q.16 : En posant que :

$$\Delta E = \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \frac{8}{3} g_s \cdot g_p \cdot \frac{m_e}{m_p} \left(\frac{e \cdot \hbar}{2 \cdot m_e}\right)^2 \frac{1}{a_0^3} = h \cdot \nu_0 = \frac{h \cdot c}{\lambda_0}$$

A.N. : $\nu_0 = 1,41 \cdot 10^9 \text{ Hz}$ et $\lambda_0 = 21,3 \text{ cm}$

On vérifie que la raie HI à 21 cm résulte de la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'atome d'hydrogène. Cette radiation se situe dans le domaine des micro-ondes.

Problème 3 : Mécanique du solide (extrait Mines et Ponts MP 2015)

1) Principe d'inertie : tout objet libéré de toute interaction décrit une trajectoire rectiligne et uniforme dans un référentiel privilégié appelé "référentiel d'inertie" ou référentiel galiléen.

Principe fondamental de la dynamique : soit M un point matériel de masse (inerte) m_i observé dans un référentiel R galiléen et soumis à la somme $\sum \vec{F}_{ext}$ des forces extérieures. Le principe fondamental de la dynamique postule que la variation de la quantité de mouvement de M dans R au cours du temps est égale à la somme des forces extérieures :

$$\left(\frac{d\vec{p}(M)_R}{dt}\right)_R = \sum \vec{F}_{ext}$$

avec $\vec{p}(M)_R = m_i \cdot \vec{v}(M)_R$.

2) Soit M_1 et M_2 deux points matériels de masse (grave ou pesante) m_1 et m_2 . La force gravitationnelle exercée par M_1 sur M_2 est donnée la 4^{ème} loi de Newton (également connue sous le nom de loi d'attraction universelle) :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r^2} \vec{u}_r$$

avec $r = \|\overrightarrow{M_1 M_2}\|$ et $\vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{M_1 M_2}$

3) Nous savons que la puissance du couple de rappel est donnée par :

$$P = M_0 \cdot \omega = -C \cdot (\theta(t) - \theta_0) \cdot \omega = -C \cdot (\theta(t) - \theta_0) \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{\delta w}{dt} = -\frac{dE_{P,S}}{dt}$$

En intégrant, on établit que :

$$E_{P,S}(\theta) = \frac{1}{2} C \cdot (\theta(t) - \theta_0)^2 + A$$

avec A constante additive. Si on pose que $E_{P,S}(\theta_0) = 0$ alors :

$$E_{P,S}(\theta) = \frac{1}{2} C \cdot (\theta(t) - \theta_0)^2$$

Si on note J le moment d'inertie du système $S = \{\text{barre} + \text{sphères}\}$, son énergie cinétique est donnée par :

$$E_{C,S} = \frac{1}{2} J \cdot \omega^2$$

L'énergie cinétique de S est la somme de $E_{P,S}(\theta)$ et de $E_{C,S}$ (avec $\omega = \dot{\theta}$) :

$$E_{m,S} = \frac{1}{2} J \cdot \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} C \cdot (\theta(t) - \theta_0)^2$$

4) Appliquons le théorème de la puissance mécanique à S : $\frac{dE_{m,S}}{dt} = P^{nc} = -\alpha \cdot \dot{\theta}^2$.

En explicitant :

$$J \cdot \dot{\theta} \cdot \ddot{\theta} + C \cdot (\theta(t) - \theta_0) \cdot \dot{\theta} = -\alpha \cdot \dot{\theta}^2$$

Soit l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$:

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{J} \dot{\theta} + \frac{C}{J} \theta = \frac{C}{J} \theta_0$$

5) Le régime d'évolution du pendule est très faiblement amorti donc $\Delta = \left(\frac{\alpha}{J}\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{C}{J}\right) < 0$ soit :

$$\alpha < 2 \cdot \sqrt{J \cdot C}$$

Les racines de l'équation caractéristique sont :

$$r_+ = -\frac{\alpha}{2 \cdot J} + i \sqrt{\frac{C}{J} - \frac{\alpha^2}{4 \cdot J^2}}$$

$$r_- = -\frac{\alpha}{2 \cdot J} - i \sqrt{\frac{C}{J} - \frac{\alpha^2}{4 \cdot J^2}}$$

La solution est pseudo périodique et du type :

$$\theta(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi) + \theta_0$$

avec $\tau = 2 \frac{J}{\alpha}$ temps caractéristique et $\Omega = \sqrt{\frac{C}{J} - \frac{\alpha^2}{4 \cdot J^2}}$ pseudo pulsation. Pour $t \rightarrow \infty$, on vérifie que $\theta_\infty = \theta_0$. La pseudo période est donnée par :

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\Omega} = 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{C}{J} - \frac{\alpha^2}{4 \cdot J^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

6) Pour $\alpha = 0$, $T = T_0$: période propre des oscillations, soit :

$$T_0 = 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{C}{J} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

Exprimons T en fonction de T_0 et de ε :

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{C}{J} - \frac{\alpha^2}{4 \cdot J^2} \right)^{-\frac{1}{2}} = 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{C}{J} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left[1 - \frac{\alpha^2}{4 \cdot J \cdot C} \right]^{-\frac{1}{2}} = T_0 \cdot (1 - \varepsilon^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Pour $\varepsilon = \frac{\alpha}{2 \cdot \sqrt{J \cdot C}} \ll 1$: nous pourrions retenir la formule approchée :

$$T = T_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \right)$$

7) L'écart relatif est donné par : $\frac{T - T_0}{T_0} = \frac{1}{2} \varepsilon^2$.

On peut faire l'hypothèse que $T = T_0$ avec moins de 1% d'erreur si $\varepsilon < 0,14$.

8) En supposant $T = T_0$: $T = 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{C}{J} \right)^{-\frac{1}{2}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{J}{C}}$ avec $J = J_0 + 2 \cdot J_1 + 2 \cdot m \cdot L^2$:

$$T^2 = \frac{4 \cdot \pi^2}{C} \cdot (J_0 + 2 \cdot J_1 + 2 \cdot m \cdot L^2)$$

A partir des valeurs proposées, on établit que : $C = 3,0 \cdot 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ et $J_0 + 2 \cdot J_1 = 5,2 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. On vérifie que : $J_0 + 2 \cdot J_1 \ll 2 \cdot m \cdot L^2$ soit :

$$T^2 = \frac{4 \cdot \pi^2}{C} \cdot (2 \cdot m \cdot L^2)$$

$$m = \frac{C \cdot T^2}{8 \cdot \pi^2 \cdot L^2}$$

9) La force d'inertie d'entraînement ressentie par un point matériel M de masse (inerte) m_i a pour expression : $\vec{F}_{ie} = m_i \cdot \omega^2 \cdot \overline{HM}$ avec H projection orthogonale de M sur l'axe de rotation du référentiel. On peut ainsi définir les forces d'inerties ressenties par M_1 de masse inerte m_{i1} et M_2 de masse inerte m_{i2} :

$$\vec{F}_{ie1} = m_{i1} \cdot \omega_t^2 \cdot \overline{HM_1}$$

$$\vec{F}_{ie2} = m_{i2} \cdot \omega_t^2 \cdot \overline{HM_2}$$

En projetant ces deux forces dans la base locale $(\vec{u}_z; \vec{u}_\rho; \vec{u}_\lambda)$, on établit que :

$$\vec{F}_{ie1} = m_{i1} \cdot \omega_t^2 \cdot (R_T \cdot \cos \lambda) \cdot (\cos \lambda \cdot \vec{u}_z - \sin \lambda \cdot \vec{u}_\lambda) - m_{i1} \cdot \omega_t^2 \cdot L \cdot \vec{u}_\rho$$

$$\vec{F}_{ie2} = m_{i2} \cdot \omega_t^2 \cdot (R_T \cdot \cos \lambda) \cdot (\cos \lambda \cdot \vec{u}_z - \sin \lambda \cdot \vec{u}_\lambda) + m_{i2} \cdot \omega_t^2 \cdot L \cdot \vec{u}_\rho$$

A l'équilibre : $\sum M_0 = 0$. En explicitant :

$$M_{0i1} + M_{0i2} + M_0 = 0$$

avec M_{Oi1} et M_{Oi2} : moment des forces d'inertie \vec{F}_{ie1} et \vec{F}_{ie2} par rapport à O , projeté sur \vec{u}_z et M_0 moment du couple de rappel défini dans l'énoncé.

$$M_{Oi1} = (\overrightarrow{OM_1} \wedge \overrightarrow{F_{ie1}}) \cdot \vec{u}_z \\ = [-L \cdot \vec{u}_\rho \wedge (m_{i1} \cdot \omega_t^2 \cdot (R_T \cdot \cos \lambda) \cdot (\cos \lambda \cdot \vec{u}_z - \sin \lambda \cdot \vec{u}_\lambda) - m_{i1} \cdot \omega_t^2 \cdot L \cdot \vec{u}_\rho)] \cdot \vec{u}_z$$

$$M_{Oi1} = m_{i1} \cdot \omega_t^2 \cdot L \cdot (R_T \cdot \cos \lambda) \cdot \sin \lambda$$

De la même manière, on établit que :

$$M_{Oi2} = (\overrightarrow{OM_2} \wedge \overrightarrow{F_{ie2}}) \cdot \vec{u}_z \\ = [L \cdot \vec{u}_\rho \wedge (m_{i2} \cdot \omega_t^2 \cdot (R_T \cdot \cos \lambda) \cdot (\cos \lambda \cdot \vec{u}_z - \sin \lambda \cdot \vec{u}_\lambda) + m_{i2} \cdot \omega_t^2 \cdot L \cdot \vec{u}_\rho)] \cdot \vec{u}_z$$

$$M_{Oi2} = -m_{i2} \cdot \omega_t^2 \cdot L \cdot (R_T \cdot \cos \lambda) \cdot \sin \lambda$$

Sachant que : $M_{Oi1} + M_{Oi2} + M_0 = 0$:

$$\omega_t^2 \cdot L \cdot (R_T \cdot \cos \lambda) \cdot \sin \lambda \cdot (m_{i1} - m_{i2}) - C \cdot (\theta_{\infty 1} - \theta_0) = 0$$

De la même manière, on établit que :

$$-\omega_t^2 \cdot L \cdot (R_T \cdot \cos \lambda) \cdot \sin \lambda \cdot (m_{i1} - m_{i2}) - C \cdot (\theta_{\infty 2} - \theta_0) = 0$$

Ainsi :

$$\Delta\theta = \theta_{\infty 1} - \theta_{\infty 2} = \frac{R_T \cdot \omega_t^2 \cdot L \cdot \sin 2 \cdot \lambda \cdot (m_{i1} - m_{i2})}{C}$$

10) Sachant que la lunette permet de détecter une déviation de 1 mm à 2 m de distance : $\Delta\theta = 5 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$.

$$\delta_m = \frac{|m_{i1} - m_{i2}|}{m}$$

En explicitant, avec $m = \frac{C \cdot T^2}{8 \cdot \pi^2 \cdot L^2}$:

$$\delta_m = \frac{8 \cdot \pi^2 \cdot L \cdot |\Delta\theta|}{R_T \cdot \omega_t^2 \cdot T^2 \cdot \sin 2 \cdot \lambda}$$

A.N. : $L = 6,0 \text{ cm}$; $T = 436 \text{ s}$; $|\Delta\theta| = 5 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$; $R_T = 6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$; $\omega_t = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ (vitesse angulaire de rotation de la Terre autour de l'axe des pôles) :

$$\delta_m = 3,7 \cdot 10^{-7}$$

11) Si $\Delta\theta = 0$ alors $m_{i1} = m_{i2}$: cette expérience permet de vérifier l'identité des masses inertes de M_1 et de M_2 avec une précision de l'ordre de $3,7 \cdot 10^{-7}$. Ainsi, deux sphères de natures différentes ayant une même masse grave ont également la même masse inerte.