

Problème 1 Champ géomagnétique

A Mesure du champ géomagnétique

Dans cette première partie, nous nous intéressons à la mesure de la composante horizontale du champ magnétique terrestre, de norme B_H , grâce à un dispositif de type *bobines de Helmholtz* qui peut être réalisé facilement avec du matériel courant.

A.1 Une spire de rayon R , d'axe \vec{u}_x et située en $x = 0$ est parcourue par un courant électrique continu d'intensité I . Elle crée en un point M d'abscisse x de son axe un champ magnétique $\vec{B}_{\text{spire}}(x)$ dont l'amplitude s'exprime par :

$$B_{\text{spire}}(x) = \frac{\mu_0 I}{2R} \left(1 + \left(\frac{x}{R} \right)^2 \right)^{-3/2}$$

À l'aide d'un schéma, préciser la direction de ce champ magnétique et discuter de son sens. En déduire une expression vectorielle \vec{B}_{spire} si la spire est orientée positivement par rapport à l'axe de la spire, lui-même orienté par \vec{u}_x .

A.2 Déterminer alors le champ magnétique $\vec{B}_{\text{bobines}}(x)$ créé en un point M d'abscisse x de l'axe commun à deux bobines d'épaisseur négligeable, comprenant chacune N spires, parcourues par des courants de même sens et de même intensité et situées respectivement en $x = -e/2$ et $x = +e/2$. Faire un schéma représentant le système.

A.3 Tracer qualitativement l'amplitude $B_{\text{bobines}}(x)$ du champ $\vec{B}_{\text{bobines}}(x)$ en fonction de x , en faisant apparaître la contribution de chaque bobine. On distinguera différents cas selon que e est plus grand ou plus petit qu'une valeur critique e_0 (qu'on ne cherchera pas à déterminer). Quel est l'intérêt pratique du cas $e = e_0$?

A.4 À partir de l'étude de la courbe $B_{\text{spire}}(x)$ et de l'observation de ses points d'inflexion, justifier sans aucun calcul que, pour cette valeur particulière e_0 de e , la fonction $B_{\text{bobines}}(x)$ puisse être considérée comme constante à l'ordre 3 au voisinage de 0. On ne cherchera pas à calculer e_0 , mais uniquement à décrire les variations de $B_{\text{bobines}}(x)$ au voisinage de 0 pour $e = e_0$.

A.5 On positionne les bobines de façon à ce que $e = e_0 = R$. En $x = 0$, on place une petite boussole constituée d'une aiguille aimantée susceptible de tourner librement autour d'un axe vertical passant par son milieu. La norme du moment magnétique de cette aiguille est notée M et on note J son moment d'inertie par rapport à son axe de rotation.

L'axe des bobines est aligné avec les lignes de champ de la composante horizontale du champ magnétique terrestre de telle sorte qu'en $x = 0$, l'amplitude B du champ magnétique total s'écrit $B = B_{\text{bobines}}(x = 0) + B_H$.

Le moment $\vec{\Gamma}$ du couple subit par un dipôle magnétique de moment \vec{m} plongé dans un champ magnétique extérieur uniforme \vec{B}_{ext} est donné par $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}_{\text{ext}}$. Préciser la position stable de l'aiguille.

A.6 On appelle T_1 la période des petites oscillations de l'aiguille par rapport à sa position d'équilibre. Montrer que T_1 peut s'exprimer en fonction de J , B et m . On justifiera les différentes hypothèses simplificatrices.

A.7 On appelle T_2 la période des petites oscillations de l'aiguille lorsque le sens du courant dans les bobines est inversé par rapport à la question précédente. Exprimer B_H en fonction de T_1/T_2 . Préciser l'intérêt de la méthode.

B Limites et explications historiques

Dès le XVII^e siècle, il a été imaginé qu'une sorte de super aimant permanent soit au centre de la Terre et crée le champ géomagnétique.

B.1 À l'aide des données et des textes de l'annexe, donner au moins deux arguments qui permettent de réfuter cette hypothèse.

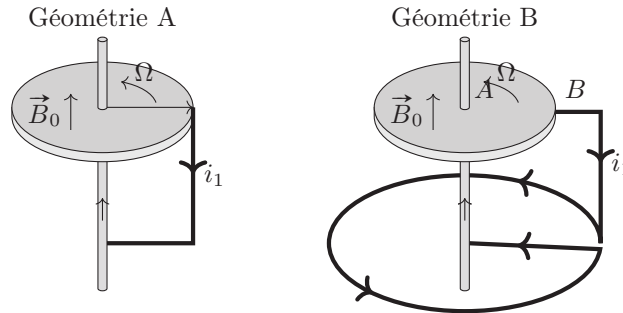
B.2 En 1947, Patrick Blackett (lauréat du prix Nobel de physique en 1948) propose que *tout corps céleste possède un moment magnétique proportionnel à son moment cinétique*. C'est l'effet Blackett. Quelle entité connaissez-vous qui possède une telle propriété ? Développer en quelques lignes le lien entre moment cinétique et moment magnétique pour cette entité. Préciser notamment le facteur de proportionnalité.

B.3 Peut-on appliquer ce modèle à la Terre? Préciser quel élément de l'annexe permet de réfuter également cette hypothèse.
 Blackett lui-même réfuta sa théorie en 1950.

C Effet Dynamo : la dynamo de Bullard

L'échec des théories précédentes amène à penser que le champ magnétique de la Terre résulte d'un processus de régénération continue associée à des courants électriques. Le but de cette partie est de décrire l'effet dynamo, effet expliquant le champ magnétique terrestre et proposé dès 1919 par Joseph Larmor.

Soit une roue d'axe \vec{u}_z , de moment d'inertie J par rapport à cet axe, en rotation à la vitesse $\vec{\Omega} = \Omega \vec{u}_z$ plongée dans un champ magnétique $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_z$. Un fil électrique, en contact parfait entre l'extrémité de la roue et son axe, permet de créer un circuit fermé passant par l'axe de la roue. On propose les deux géométries de la figure ci-dessous pour le fil.



C.1 Pour chacune des deux géométries proposées, préciser la direction du champ magnétique \vec{B}_1 créé par le courant électrique induit dans le circuit filiforme (d'intensité i_1). En déduire que seule la géométrie B est propice à un effet dynamo.

Dans la suite, on étudie la géométrie B. On va dans un premier temps procéder par itération du processus d'induction pour déterminer la condition dynamo de ce dispositif. On considère donc le lien suivant entre les différentes grandeurs : $B_0 \rightarrow e_1 \rightarrow i_1 \rightarrow B_1 \rightarrow e_2 \rightarrow \dots$

C.2 On s'intéresse au champ \vec{B}_1 créé par la spire circulaire parcourue par le courant d'intensité i_1 , résultant de l'induction due au mouvement du disque dans \vec{B}_0 . On note a le rayon du disque, b celui de la spire et d la distance entre le disque et la spire selon l'axe \vec{u}_z . Dans l'hypothèse où $d \ll a \ll b$, justifier que pour un point P appartenant au disque, le champ \vec{B}_1 puisse s'écrire sous la forme simplifiée :

$$\vec{B}_1(P, t) = B_1(t) \vec{u}_z$$

C.3 On appelle M le coefficient de mutuelle induction entre la spire et le disque, tel que le flux du champ \vec{B}_1 sur le disque, orienté selon \vec{u}_z , s'écrive $\phi_{\text{spire} \rightarrow \text{disque}} = M i_1$

Exprimer le flux $\phi_{\text{spire} \rightarrow \text{disque}}$ en fonction de B_1 et de a puis exprimer i_1 en fonction de M , B_1 et de a .

C.4 En considérant seulement B_0 , une force électromotrice d'induction, notée e_1 apparaît entre le centre du disque et son extrémité en contact avec le fil. On montre que : $e_1 = \frac{\Omega B_0 a^2}{2}$. On note R la résistance totale du circuit. Montrer qu'en régime stationnaire : $B_1 = \frac{M \Omega B_0}{2 \pi R}$

Dans les questions suivantes, on suppose qu'il n'existe plus de champ magnétique extérieur autre que celui éventuellement auto-entretenu par la dynamo, c'est-à-dire que $\vec{B}_0 = \vec{0}$. Plutôt que par itération, on raisonnera sur le champ magnétique total $\vec{B} = B \vec{u}_z$ existant dans le disque. On montre que dans ces conditions, la force électromotrice induite est donnée par : $e = \frac{\Omega B a^2}{2}$.

C.5 À partir de l'expression du flux du champ \vec{B} à travers le disque $\phi_{\text{spire} \rightarrow \text{disque}}$ exprimer le champ magnétique \vec{B} en fonction de M , i et de a . Montrer que la force électromotrice induite a pour expression : $e = \frac{\Omega M i(t)}{2 \pi}$.

C.6 On appelle L le coefficient d'auto-induction de la spire. Représenter le schéma électrique équivalent au dispositif et en déduire l'équation différentielle régissant l'évolution de $i(t)$. On appelle τ le temps caractéristique du système. A quelle condition cette constante est-elle positive? On peut montrer que pour avoir un effet dynamo la condition suivante doit être vérifiée : $\frac{M \Omega}{2 \pi R} > 1$. Cette condition pour avoir un effet dynamo impose une grande vitesse et/ou une grande mutuelle, et/ou une petite résistance. Tous ces critères favorisant chacun, un fort phénomène d'induction.

Annexe – Le noyau terrestre : un aimant permanent ?

D'après Wikipedia

Noyau terrestre

Le *noyau externe* liquide essentiellement composé de fer à 80-85%, plus environ 10-12% d'un élément léger non encore déterminé parmi le soufre, l'oxygène et le silicium, et enfin de l'ordre de 5% de nickel. Sa viscosité est estimée à de 1 à 100 fois celle de l'eau, sa température moyenne atteint 4000 °C et sa densité 10. Cette énorme quantité de métal en fusion est brassée par convection, essentiellement de nature thermique (refroidissement séculaire de la planète), et pour une plus faible partie de nature compositionnelle (séparation, démixtion des phases).

Le *noyau interne* solide (également appelé « rainne ») essentiellement métallique (alliage de fer et de nickel principalement, en proportions environ 80%-20%) constitué par cristallisation progressive du noyau externe. La pression, qui est de 3,5 millions de bars (350 GPa), le maintient dans un état solide malgré une température supérieure à 6000 °C et une densité d'environ 13.

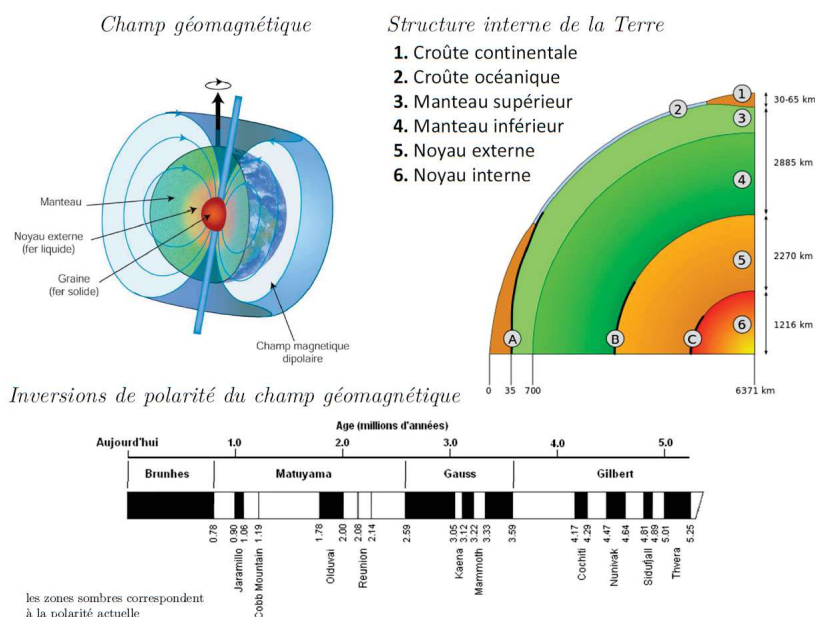
Aimant permanent

Un *aimant permanent* ou aimant dans le langage courant, est un objet fabriqué dans un matériau magnétique dur, c'est-à-dire dont le champ rémanent et l'excitation coercitive sont grands. Cela lui donne des propriétés particulières liées à l'existence du champ magnétique, comme celle d'exercer une force d'attraction sur tout matériau ferromagnétique. Les pôles magnétiques sont nommés « nord » et « sud » en fonction des pôles géographiques terrestre vers lesquels ils sont attirés. Comme les pôles magnétiques de polarité opposés s'attirent mutuellement, on en déduit que les pôles géographiques terrestres ont une polarité magnétique en réalité opposée à leur polarité géographique : le pôle Nord géographique terrestre est un pôle sud magnétique, et inversement. Tout barreau aimanté s'oriente naturellement dans la direction nord-sud suivant les lignes du champ magnétique terrestre, pour peu qu'on lui laisse un axe de rotation libre de toutes contraintes. Cette propriété est utilisée dans la fabrication des boussoles. Les aimants permanents contiennent presque toujours des atomes d'au moins un des éléments chimiques suivants : fer, cobalt ou nickel, ou de la famille des lanthanides (terres rares).

Température de Curie

La *température de Curie* est la température pour laquelle un matériau perd son aimantation, et ce définitivement (le matériau ne retrouvera pas son aimantation d'origine après refroidissement), mais néanmoins de façon réversible (une fois refroidi, le matériau retrouve ses propriétés ferromagnétiques et pourra à nouveau être magnétisé). Le tableau ci dessous donne les caractéristiques des principaux matériaux susceptibles de réaliser un aimant :

Matériaux	Température de Curie	Remarque
Acier	750 °C	Aimants anciens
Ferrites	300 °C	Aimants les moins chers
Alnico	~ 800 °C	Démagnétisation trop rapide
Sanarium Cobalt	~ 750 °C	Prix élevés à cause du cobalt



Problème 2 : le haut-parleur électrodynamique

Un haut-parleur électrodynamique, schématisé en figure 1, est constitué d'un châssis sur lequel est fixé le circuit magnétique. Sur cet ensemble rigide est fixé l'élément actif du haut-parleur : l'équipage mobile formé de la membrane et de la bobine mobile. La liaison avec le châssis est assurée, près du centre par le spider, pièce de toile rigidifiée par du plastique et qui joue le rôle d'un ressort et sur le pourtour par une suspension périphérique. L'ensemble de la suspension assure le rappel vers la position d'équilibre et le guidage en translation parallèlement à l'axe $z'z$. Le circuit magnétique, constitué d'aimants permanents, génère un champ magnétique \vec{B} radial et uniforme ($B = 1,05 \text{ T}$) dans l'entrefer. La longueur totale du bobinage de la bobine mobile vaut $l = 3,81 \text{ m}$. La masse de l'équipage mobile vaut $m = 4,0 \text{ g}$.

Les parties A.1-, A.2- et A.3- ne sont que très partiellement liées.

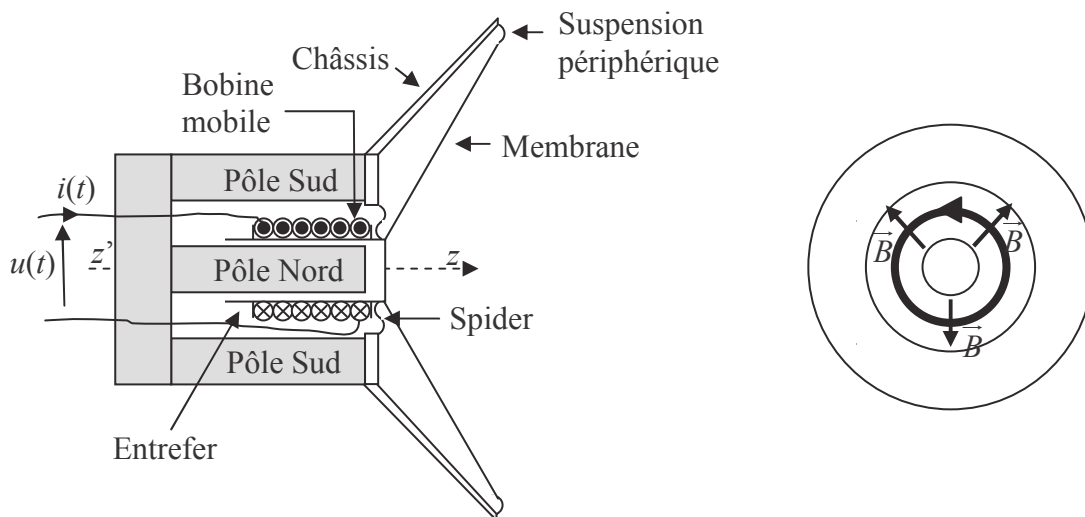


Figure 1 : schéma de principe du haut-parleur électrodynamique

A.1- Etude temporelle du fonctionnement

A.1.1- Pourquoi qualifie-t-on le haut-parleur de convertisseur électromécanique ?

A.1.2- On applique aux bornes de la bobine une tension variable $u(t)$. La bobine est alors traversée par un courant d'intensité $i(t)$ et la membrane se déplace avec la vitesse $v(t)$.

A.1.2.1- Justifier précisément l'apparition d'une f.é.m. induite $e(t)$ aux bornes de la bobine.

A.1.2.2- Le schéma électrique équivalent de la bobine est donné en figure 2, page suivante. Donner la relation qui lie $u(t)$ à $i(t)$, $i'(t) = \frac{di(t)}{dt}$ et $e(t)$. Que représente chacun des termes de cette équation dite électrique ? Pour la suite du problème, on posera $e(t) = v(t) \cdot B \cdot l$.

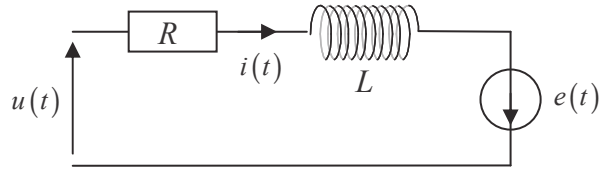


Figure 2 : schéma électrique de la bobine

A.1.3- Donner l'expression de la force élémentaire de Laplace $d\vec{f}_L$ exercée sur une portion de conducteur de longueur dl en fonction de $i(t)$, dl , B et \vec{u}_z .

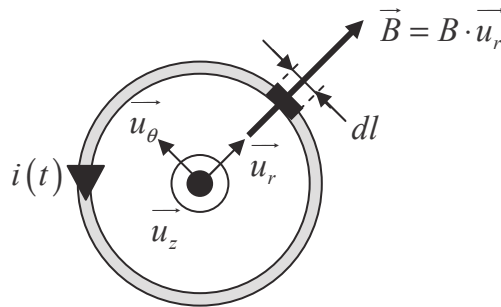


Figure 3 : portion de conducteur soumis à la force de Laplace

A.1.4- En prenant l'origine des z comme étant la position d'équilibre du centre d'inertie de l'équipage mobile (bobine + membrane), le principe fondamental de la dynamique appliqué à ce système donne la relation suivante : $m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = -i(t) \cdot l \cdot B \cdot \vec{u}_z - k \cdot z(t) \cdot \vec{u}_z - \lambda \cdot \vec{v}$. Interpréter les différents termes de cette relation.

En déduire une équation reliant $i(t)$ à $z(t)$ et ses dérivées $z'(t) = \frac{dz(t)}{dt}$ et $z''(t) = \frac{d^2z(t)}{dt^2}$. L'équation ainsi obtenue est appelée équation mécanique.

A.2- Régime sinusoïdal forcé

La tension appliquée est supposée sinusoïdale, de fréquence f : $u(t) = U_m \cdot \cos(\omega \cdot t)$ et $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$. Nous utiliserons le formalisme complexe qui, à toute fonction sinusoïdale du type $a(t) = A_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$ associe la fonction complexe $\underline{a}(t) = A_m \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$. On rappelle que j est le nombre complexe tel que $j^2 = -1$.

A.2.1- Ecrire les équations mécanique et électrique en utilisant le formalisme complexe.

A.2.2- En déduire l'expression de l'impédance du haut-parleur $\underline{Z}(\omega) = \frac{\underline{u}(t)}{\underline{i}(t)}$.

A.2.3- Cette impédance $\underline{Z}(\omega)$ correspond à la mise en série de deux impédances : l'une $\underline{Z}_e(\omega)$, appelée impédance propre, qui ne contient que des termes relatifs au circuit électrique et l'autre $\underline{Z}_m(\omega)$, appelée impédance motionnelle, qui ne dépend que des caractéristiques mécaniques du système. Préciser les expressions de $\underline{Z}_e(\omega)$ et $\underline{Z}_m(\omega)$.

A.2.4- Montrer que l'admittance motionnelle $\underline{Y}_m(\omega) = \frac{1}{\underline{Z}_m(\omega)}$ peut s'écrire sous la forme :

$\underline{Y}_m(\omega) = j \cdot C_m \cdot \omega + \frac{1}{j \cdot L_m \cdot \omega} + \frac{1}{R_m}$. Préciser les expressions de C_m , L_m et R_m en fonction de l , B , k , m et λ . On donne $k = 1\,250 \text{ N.m}^{-1}$ et $\lambda = 1,0 \text{ kg.s}^{-1}$, vérifier que $C_m = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ F}$, $L_m = 12,8 \text{ mH}$ et $R_m = 16 \, \Omega$.

A.2.5- Proposer un schéma électrique équivalent de l'impédance $\underline{Z}(\omega)$ du haut-parleur dans lequel vous ferez apparaître R , L , C_m , L_m et R_m .

A.2.6- On peut également poser que l'impédance du haut-parleur se compose d'une partie réelle R_T et d'une partie imaginaire X_T : $\underline{Z}(\omega) = R_T + j \cdot X_T$. Montrer alors que l'expression de R_T est la

suivante : $R_T = R + \frac{R_m}{1 + R_m^2 \cdot \left(C_m \cdot \omega - \frac{1}{L_m \cdot \omega} \right)^2}$.

A.2.7- En utilisant la courbe $R_T = f(\omega)$ de la figure 4, déterminer la valeur numérique de la résistance R et montrer que la fréquence de résonance vaut $f_0 = 89 \text{ Hz}$. Vérifier la cohérence de la valeur de f_0 avec les données de l'énoncé.

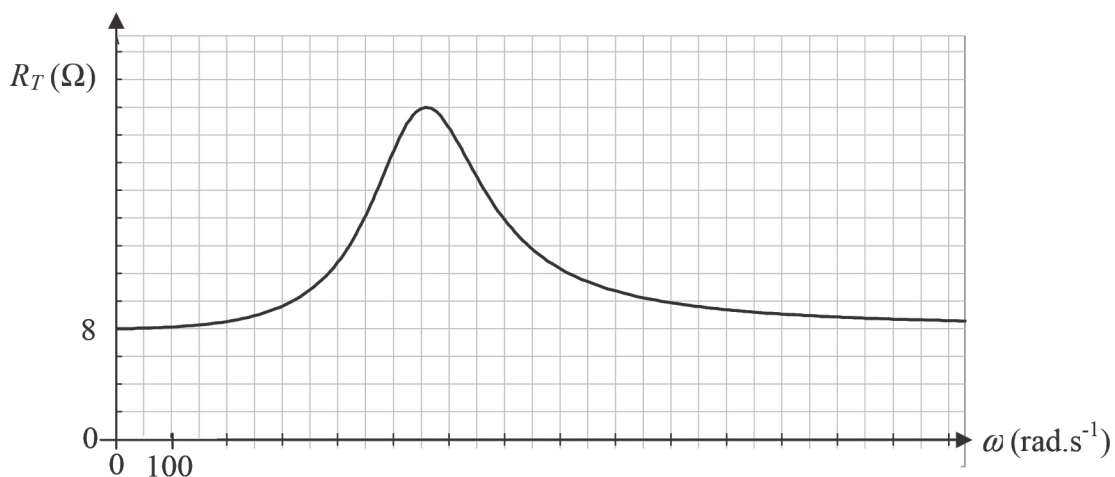


Figure 4 : courbe représentant R_T en fonction de ω

A.3- Etude énergétique

Nous ferons l'hypothèse que la transformation de l'énergie mécanique des parties mobiles en énergie acoustique s'effectue sans perte.

A.3.1- Etablir le bilan de puissance électrique global sous la forme :

$$u(t) \cdot i(t) = \frac{d(E_{magn})}{dt} + P_J(i(t)) + P_L(v(t)).$$

Préciser les expressions de E_{magn} , $P_J(i(t))$ et $P_L(v(t))$.

Interpréter chacun des termes du bilan.

A.3.2- Etablir le bilan de puissance mécanique global sous la forme :

$$\frac{d(E_c(v(t)))}{dt} + P_A(v(t)) + \frac{d(E_{pe}(z(t)))}{dt} = P_L(v(t)).$$

Préciser les expressions de $E_c(v(t))$, $E_{pe}(z(t))$ et $P_A(v(t))$.

Interpréter chacun des termes du bilan.

A.3.3- Dédurre des deux relations précédentes que :

$$u(t) \cdot i(t) = \frac{d(E_{magn})}{dt} + P_J(i(t)) + \frac{d(E_M(t))}{dt} + P_A(v(t)).$$

A.3.4- Montrer que la puissance moyenne $\langle P_S(t) \rangle$ fournie par l'alimentation électrique est reliée à la valeur moyenne du courant au carré consommé par le haut-parleur $\langle i(t)^2 \rangle$ et à la valeur moyenne de la vitesse au carré de l'équipage mobile $\langle v(t)^2 \rangle$ par la relation :

$$\langle P_S(t) \rangle = R \cdot \langle i(t)^2 \rangle + \lambda \cdot \langle v(t)^2 \rangle.$$

Lequel de ces termes correspond à la puissance utile moyenne $\langle P_u(t) \rangle$? En déduire l'expression du rendement η .

A.3.5- La tension $u(t)$ appliquée aux bornes du haut-parleur est une tension alternative sinusoïdale, de valeur efficace U_{eff} . La bobine est alors traversée par un courant $i(t)$ alternatif sinusoïdal d'intensité efficace I_{eff} .

On rappelle que le haut-parleur peut se modéliser comme indiqué en figure 5. Montrer que le rendement η défini en question **A3.4-** a pour expression $\eta = \frac{R_T - R}{R_T}$.

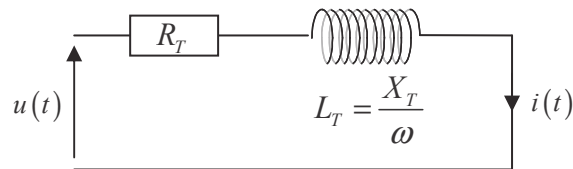


Figure 5 : modélisation du haut-parleur

A.3.6- On donne, en figure 6, la représentation du rendement η en fonction de la pulsation ω . Pour quelle fréquence le rendement est-il maximal ? Est-ce en accord avec les valeurs numériques précédentes ? Justifier votre réponse.

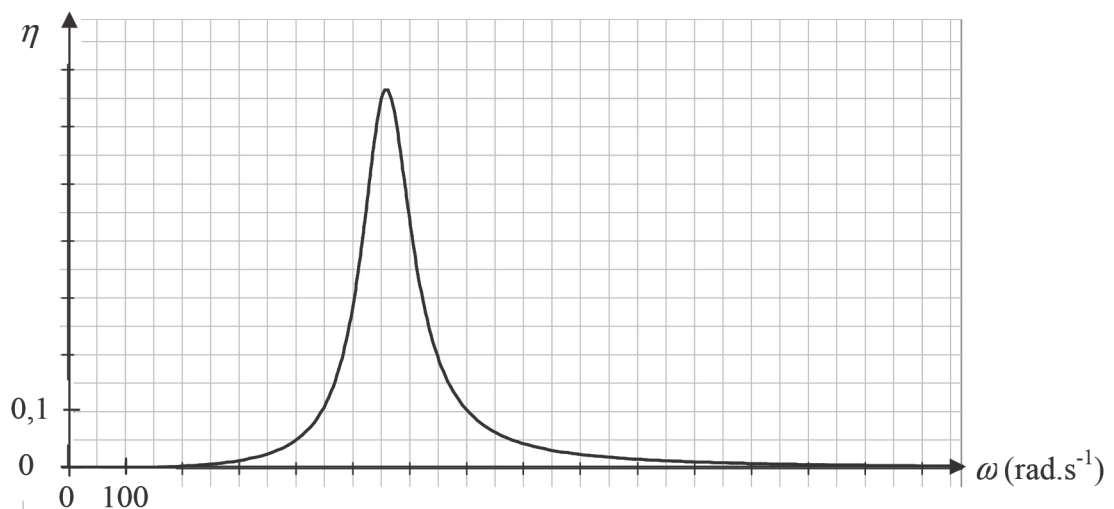


Figure 6 : courbe représentant le rendement η en fonction de la pulsation ω

A.3.7- Dans quelle gamme de fréquences l'utilisation du haut-parleur est-elle intéressante ? Rappeler l'intervalle de fréquences dans lequel l'oreille humaine entend les sons.

A.3.8- Expliquer pourquoi les enceintes acoustiques comportent plusieurs haut-parleurs.