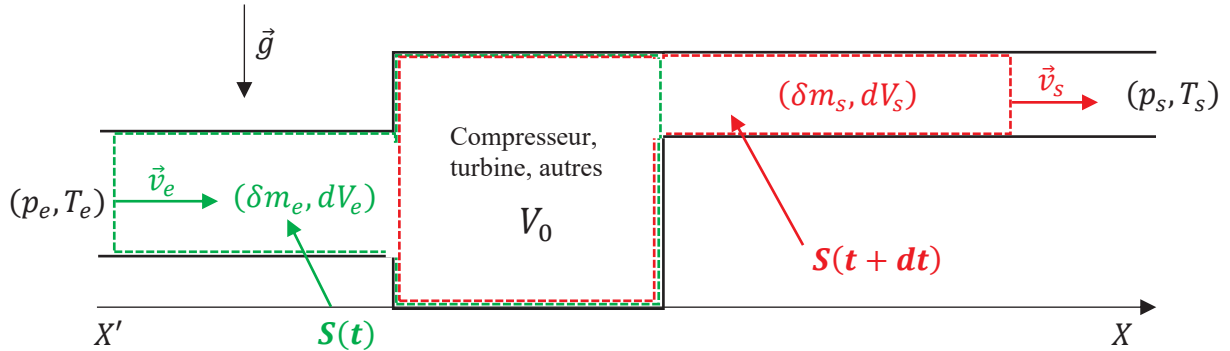


## Problème 1 : Etude du circuit secondaire d'une centrale nucléaire

### I. Préliminaire

1) L'objectif est d'établir le premier principe de la thermodynamique appliqué aux fluides en écoulement stationnaires, également appelé premier principe industriel (noté PPI). Dans cette étude, nous négligerons les variations d'énergie mécanique macroscopique. L'évolution du fluide est schématisée par la figure ci-dessous :



Le fluide s'écoule dans le sens de l'axe  $X'X$ . On note  $p_e$  et  $T_e$  la pression et la température dans le fluide en amont d'une zone de perturbation (compresseur, turbine,...), loin de la perturbation et  $p_s$  et  $T_s$  la pression et la température dans le fluide en aval de la perturbation, loin de la perturbation. En régime stationnaire, toutes les grandeurs thermodynamiques qui caractérisent le fluide sont indépendantes du temps.

On considère le système fermé composé par la masse  $m$  de fluide de surface convective  $S(t)$  et  $S(t + dt)$ . Appliquons le premier principe de la thermodynamique au système, entre  $t$  et  $t + dt$ , en négligeant la variation d'énergie mécanique macroscopique ( $dE_{m,M} = 0$ ) :

$$dE_{tot} = dU = \delta w^{nc} + \delta Q$$

Posons  $\delta w^{nc} = \delta w_p + \delta w_u$  avec  $\delta w_p$  travail élémentaire des forces de pression exercées à la frontière du système entre  $t$  et  $t + dt$  et  $\delta w_u$  travail élémentaire exercé par le compresseur, la turbine (ou autre) entre  $t$  et  $t + dt$ , appelé travail élémentaire utile.

Explicitons :

$$dU = U(t + dt) - U(t)$$

Avec :

$$\begin{cases} U(t + dt) = U_0(t + dt) + \delta U_s \\ U(t) = U_0(t) + \delta U_e \end{cases}$$

$U_0(t + dt)$  correspond à l'énergie interne du système occupant le volume  $V_0$  à l'instant  $t + dt$ , et  $\delta U_s$  l'énergie interne de la masse  $\delta m_s$ . De même,  $U_0(t)$  correspond à l'énergie interne du système occupant le volume  $V_0$  à l'instant  $t$ , et  $\delta U_e$  est l'énergie interne de la masse  $\delta m_e$ . Compte tenu de la définition du système :

$$\delta m_e = \delta m_s = \delta m$$

En régime stationnaire :

$$U_0(t + dt) = U_0(t)$$

Soit :

$$dU = \delta U_s - \delta U_e$$

En notant  $u_m$  énergie interne massique définie par :

$$u_m = \frac{\delta U}{\delta m}$$

On établit que :

$$dU = \delta U_s - \delta U_e = \delta m \cdot (u_{ms} - u_{me})$$

Explicitons désormais le travail des forces de pression entre  $t$  et  $t + dt$  :

$$\delta w_p = + p_e \cdot dV_e - p_s \cdot dV_s$$

Rq. : le milieu extérieur est moteur (+) en amont de la perturbation, il est résistant (-) en aval.

Soit  $v_m$  le volume massique du fluide (inverse de la masse volumique) définit par :

$$v_m = \frac{dV}{\delta m}$$

On peut exprimer le travail des forces de pression sous la forme :

$$\delta w_p = \delta m \cdot (p_e \cdot v_{me} - p_s \cdot v_{ms})$$

On établit ainsi que :

$$\delta m \cdot (u_{ms} - u_{me}) = \delta m \cdot (p_e \cdot v_{me} - p_s \cdot v_{ms}) + \delta w_u + \delta Q$$

Soit :

$$\delta m \cdot [(u_{ms} - u_{me}) + (p_s \cdot v_{ms} - p_e \cdot v_{me})] = \delta w_u + \delta Q$$

Soit  $h$  l'enthalpie massique définie par :

$$h = \frac{\delta H}{\delta m} = u + p \cdot v_m$$

$$\delta m \cdot (h_s - h_e) = \delta w_u + \delta Q$$

En notant  $w_u$  le travail utile massique et  $q$  le transfert thermique massique reçus algébriquement par le fluide lors de la traversée de la machine, on vérifie que :

$$h_s - h_e = w_u + q$$

## II. Cycle de Hirn

2) L'évolution de l'état 0 à l'état 1 concerne l'évolution isentropique d'un liquide. Sachant que pour une telle évolution :

$$\Delta S_{0 \rightarrow 1} = C \ln \left( \frac{T_1}{T_0} \right) = 0$$

On vérifie que  $T_0 = T_1$ . Sachant de plus que l'enthalpie d'une phase condensée ne dépend que de la température, on peut dire que :  $h_0 = h_1$ . On en déduit que l'évolution isentropique du liquide de l'état 0 à l'état 1 est également isenthalpique.

3) Sur le diagramme des frigoristes, on peut observer :

- la courbe de saturation (liquéfaction et vaporisation)
- les isentropiques
- les isothermes
- les isobares et les isenthalpiques

Allure du cycle : cf document annexe

4) Nous savons que l'évolution dans la turbine est isentropique  $\Delta s_{2' \rightarrow 3} = 0$ . En explicitant :

$$\Delta s_{2' \rightarrow 3} = s_3 - s_{2'} = 0$$

avec  $s_3 = x \cdot s_V(0,040) + (1 - x) \cdot s_L(0,040)$  et  $s_{2'}$  valeur lue dans le diagramme.

$$x \cdot s_V(0,040) + (1 - x) \cdot s_L(0,040) - s_{2'} = 0$$

On établit que :

$$x = \frac{s_{2'} - s_L(0,040)}{s_V(0,040) - s_L(0,040)}$$

A.N. : valeur lue  $s_{2'} = 6,60 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  ;  $x = 76,8 \%$

L'enthalpie du fluide à la sortie de la turbine est donnée par :

$$h_3 = x \cdot h_V(0,040) + (1 - x) \cdot h_L(0,040)$$

A.N. :  $h_3 = 1,99 \cdot 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$

Rq. : on vérifie que les valeurs de  $x$  et de  $h_3$  calculées ci-dessus sont conformes avec le cycle représenté à la question 3).

5) L'efficacité du cycle est définie par :

$$\eta = \left| \frac{\text{énergie utile}}{\text{énergie dépensée}} \right|$$

Dans cette étude, l'énergie utile est l'énergie mécanique fournie aux turbines  $w_u$  et l'énergie dépensée est  $q_C$  dégagée par l'eau du premier circuit :

$$\eta = \left| \frac{w_u}{q_C} \right| = - \frac{w_u}{q_C}$$

En appliquant le premier principe aux fluides en écoulement stationnaires de (2') à (3) :

$$\Delta h_{2' \rightarrow 3} = q_{2' \rightarrow 3} + w_u$$

L'évolution de (2') à (3) est isentropique donc  $q_{2' \rightarrow 3} = 0$  :

$$\Delta h_{2' \rightarrow 3} = w_u$$

A.N. :  $\Delta h_{2' \rightarrow 3} = h_3 - h_{2'}$ . Valeur lue dans le diagramme  $h_{2'} = 3,34 \cdot 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ . Avec  $h_3 = 1,99 \cdot 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$  on établit que  $w_u = h_3 - h_{2'} = -1,35 \cdot 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ . On vérifie que  $w_u < 0$  : cycle moteur.

Le transfert thermique  $q_C$  s'effectue de (1) à (2'). En appliquant le premier principe aux fluides en écoulement stationnaires :

$$\Delta h_{1 \rightarrow 2'} = q_C + w_u$$

Il n'y a pas de travail utile de (1) à (2') donc :

$$\Delta h_{1 \rightarrow 2'} = q_C$$

A.N. : avec  $h_{2'} = 3,35 \cdot 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$  et  $h_1 = h_0 = h_L(0,040) = 121 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$  ;  $q_C = 3,23 \cdot 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$  : on vérifie que  $q_C > 0$ .

Efficacité du cycle :  $\eta = -\frac{w_u}{q_C} = 41,8 \%$

6) Pour un moteur ditherme de Carnot, l'efficacité est donnée par :

$$\eta_C = -\frac{w_u}{q_C}$$

En appliquant le premier principe sur un cycle, on établit que :

$$q_C + q_F + w_u = 0$$

$$w_u = -(q_C + q_F)$$

Ainsi :

$$\eta_C = \frac{q_C + q_F}{q_C} = 1 + \frac{q_F}{q_C}$$

Sachant que le cycle de Carnot est réversible, sur un cycle :

$$\frac{q_C}{T_C} + \frac{q_F}{T_F} = 0$$

$$\frac{q_F}{q_C} = -\frac{T_F}{T_C}$$

On établit l'expression de l'efficacité du cycle de Carnot :

$$\eta_C = 1 - \frac{T_F}{T_C}$$

A.N. : avec  $T_F = T_0 = 29^\circ\text{C} = 302\text{ K}$  et  $T_C = T_2' = 500^\circ\text{C} = 773\text{ K}$  ;  $\eta_C = 60,9 \%$ . On vérifie que  $\eta < \eta_C$  car la création d'entropie limite l'efficacité du moteur réel.

### III. Cycle à double surchauffe

7) Allure du cycle à double surchauffe : cf document annexe. Détermination de l'efficacité du cycle à double surchauffe. Sachant que :

$$\eta_C = -\frac{w_u}{q_C}$$

En adoptant un raisonnement analogue, on établit que :

$$w_u = \Delta h_{2' \rightarrow 4} + \Delta h_{4' \rightarrow 5}$$

$$q_C = \Delta h_{1 \rightarrow 2'} + \Delta h_{4 \rightarrow 4'}$$

A.N. à partir des valeurs lues dans le diagramme :

$$\Delta h_{2' \rightarrow 4} = h_4 - h_{2'} = 3,00 \cdot 10^3 - 3,35 \cdot 10^3 = -0,35 \cdot 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$\Delta h_{4' \rightarrow 5} = h_5 - h_{4'} = 2,19 \cdot 10^3 - 3,45 \cdot 10^3 = -1,26 \cdot 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$w_u = -1,61 \cdot 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$\Delta h_{1 \rightarrow 2'} = h_{2'} - h_1 = 3,35 \cdot 10^3 - 121 = 3,23 \cdot 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$\Delta h_{4 \rightarrow 4'} = h_{4'} - h_4 = 3,45 \cdot 10^3 - 3,00 \cdot 10^3 = 0,45 \cdot 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$q_C = 3,68 \cdot 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$\eta_C = -\frac{w_u}{q_C} = 43,8 \%$$

On constate qu'avec la double surchauffe, l'efficacité est légèrement supérieure et que le titre en vapeur est plus élevé à la sortie de la turbine basse pression.

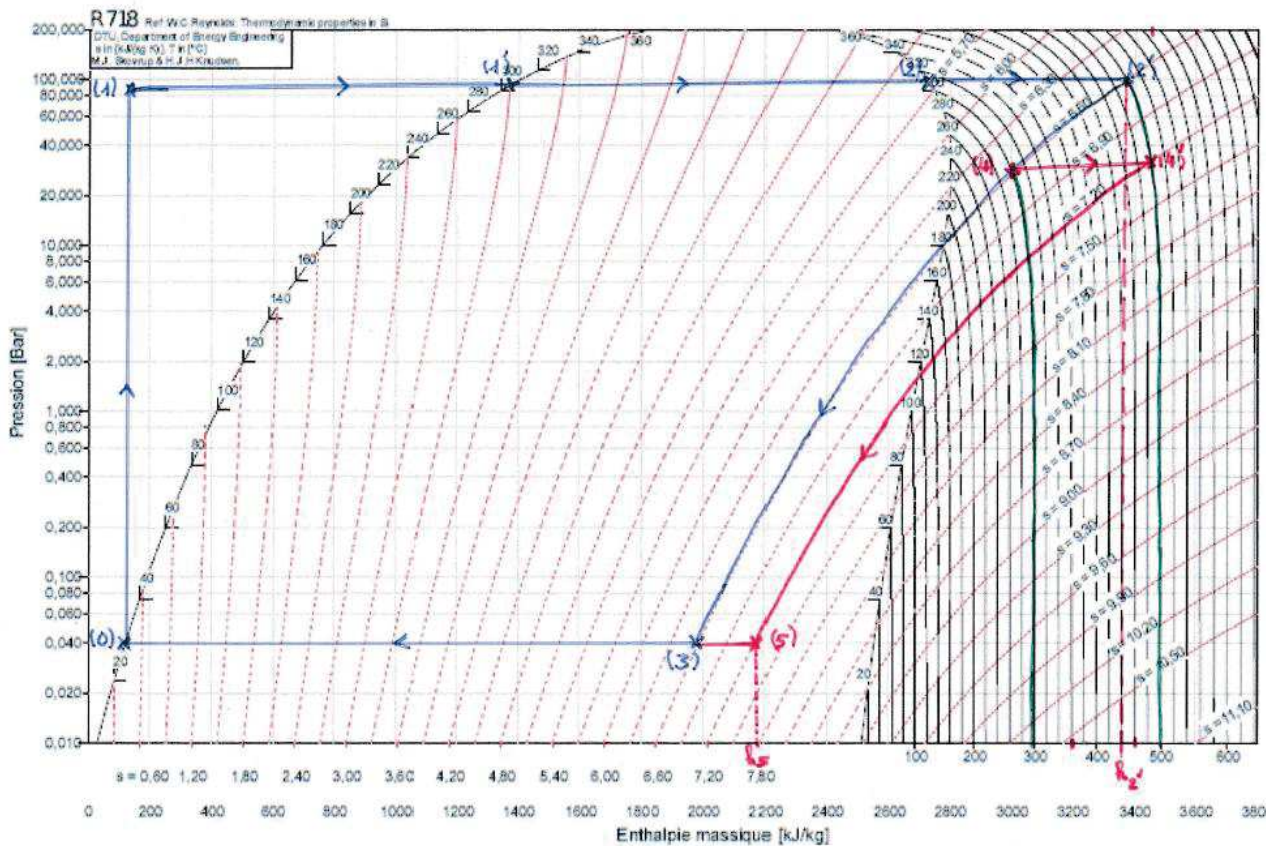


Diagramme des frigorigères.  
La pression est exprimée en bar, l'entropie massique en  $\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ , l'enthalpie massique en  $\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$  et la température en  $^{\circ}\text{C}$ .

## Problème 2 : Déviation d'un astéroïde par percussion...

1) On considère une planète (ou un astéroïde) assimilée à un point matériel  $M$  de masse  $m$  observé dans le référentiel héliocentrique supposé galiléen. Supposons que  $M$  soit soumis uniquement à la force gravitationnelle exercée par le Soleil :

$$\vec{F} = -\frac{GM_S m}{r^2} \vec{u}_r$$

avec  $O$  centre du Soleil et  $\vec{u}_r = \overrightarrow{OM}/OM$

Appliquons le théorème du moment cinétique à  $M$  dans le référentiel héliocentrique :

$$\left( \frac{d\overrightarrow{L(O)}_{R_H}}{dt} \right)_{R_H} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

Le vecteur  $\overrightarrow{OM}$  et  $\vec{F}$  sont colinéaire donc :

$$\left( \frac{d\overrightarrow{L(O)}_{R_H}}{dt} \right)_{R_H} = \vec{0}$$

On en déduit que le moment cinétique est un vecteur constant :

$$\overrightarrow{L(O)}_{R_H} = \overrightarrow{OM} \wedge m \cdot \vec{v}(M)_{R_H} = \overrightarrow{cte}$$

Par définition du moment cinétique, ceci implique que le vecteur position est en permanence porté par un plan  $\pi$  orthogonal à  $\overrightarrow{L(O)}_{R_H}$ . On en déduit que la trajectoire de  $M$  est plane et que le plan du mouvement passe par le centre de force.

2) A partir de la figure, on peut déterminer la distance maximale entre la Terre et Didymos de l'ordre de  $3,3 \cdot r_0$  donc  $r_{max} = 2,3 \cdot r_0$ . Sachant que :

$$r_{min} + r_{max} = 2 \cdot a$$

On détermine le demi-grand axe de l'orbite de Didymos :

$$a = 1,7 \cdot r_0$$

A.N. :  $a = 2,6 \cdot 10^8 \text{ km}$

3) Appliquons la 3<sup>ème</sup> loi de Kepler :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{T_T^2}{r_0^3}$$

avec  $T_T$  période de rotation de la Terre autour du Soleil

$$T = T_T \left( \frac{a}{r_0} \right)^{\frac{3}{2}}$$

A.N. :  $T = 2,2 \text{ ans}$

4) Entre 2015 et 2030 on compte 7 périodes ce qui est en accord avec la valeur de  $T$  calculée.

5) Appliquons le principe fondamental de la dynamique à Dart dans le référentiel héliocentrique :

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

avec  $\vec{F}$  force exercée par le Soleil sur Dart.

En explicitant dans la base de coordonnées polaires sur  $\vec{u}_r$  :

$$m \left( -\frac{v^2}{r_0} \right) = -\frac{GM_S m}{r_0^2}$$

On établit l'expression de la vitesse de Dart dans le référentiel héliocentrique :

$$v = \sqrt{\frac{GM_S}{r_0}}$$

On constate que cette vitesse ne dépend pas de  $m$ . Cette vitesse s'identifie donc à la vitesse de la Terre sur son orbite circulaire notée  $v_0$ .

6) Explicitons le moment cinétique de Dart avant et après modification de sa vitesse, avec :

$$\overrightarrow{L(O)}_{RH} = \overrightarrow{OM} \wedge m \cdot \vec{v}(M)_{RH}$$

Avant modification :

$$\overrightarrow{L(O)}_{RH_i} = r_0 \vec{u}_r \wedge m v_0 \vec{u}_\theta$$

$$\overrightarrow{L(O)}_{RH_i} = m r_0 v_0 \vec{u}_z$$

Après modification :

$$\overrightarrow{L(O)}_{RH_f} = r_0 \vec{u}_r \wedge (m v_1 \vec{u}_r + m v_0 \vec{u}_\theta) = m r_0 v_0 \vec{u}_z$$

On constate que la variation du moment cinétique est nulle :  $\Delta \overrightarrow{L(O)}_{RH} = \vec{0}$

7) Variation d'énergie mécanique  $\Delta E_m = E_{mf} - E_{mi} = \frac{1}{2} m v_1^2$

Déterminons la variation du demi-grand axe de la trajectoire de Dart :

$$E_{mi} = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{GM_S m}{r_0}$$

Sachant que :

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM_S}{r_0}}$$

$$E_{mi} = -\frac{GM_S m}{2r_0}$$

Après modification de sa vitesse, la trajectoire de Dart est elliptique, on peut donc exprimer son énergie mécanique sous la forme :

$$E_{mf} = -\frac{GM_S m}{2a} = \frac{1}{2} m (v_0^2 + v_1^2) - \frac{GM_S m}{r_0} = -\frac{GM_S m}{2r_0} + \frac{1}{2} m v_1^2$$

On établit que :

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{r_0} - \frac{v_1^2}{GM_S}$$

Sachant que :

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM_S}{r_0}}$$

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{r_0} \left( 1 - \frac{v_1^2}{v_0^2} \right)$$

Soit :

$$a = \frac{r_0}{1 - \frac{v_1^2}{v_0^2}}$$

Sachant que  $|v_1| \ll v_0$ , en effectuant un développement limité au premier ordre en  $|v_1|/v_0$  :

$$a = r_0 \left( 1 - \frac{v_1^2}{v_0^2} \right)^{-1} = r_0 \left( 1 + \frac{v_1^2}{v_0^2} \right)$$

### Première méthode : utilisation de l'énergie potentielle effective

8) On assimile l'engin spatial Dart à un point matériel  $M$  de masse  $m$ . On note  $E_m(M)_{RH}$  son énergie mécanique dans le référentiel héliocentrique :

$$E_m(M)_{RH} = E_C(M)_{RH} + E_P(r)$$

Sa trajectoire est plane. En coordonnées polaires, son énergie cinétique à pour expression :

$$E_C(M)_{RH} = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$$

Explicitons son moment cinétique :

$$\overline{L(O)}_{RH} = \overline{OM} \wedge m \cdot \vec{v}(M)_{RH} = mr^2 \dot{\theta} \vec{u}_z = mr_0 v_0 \vec{u}_z$$

On en déduit que :

$$r^2 \dot{\theta} = r_0 v_0$$

Soit :

$$E_C(M)_{RH} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \left( \frac{r_0^2 v_0^2}{r^2} \right)$$

Sachant que :

$$E_P(r) = -\frac{GM_S m}{r} = -\frac{mr_0 v_0^2}{r}$$

$$E_m(M)_{RH} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{Peff}(r) = \text{cte}$$

$$E_{Peff}(r) = \frac{1}{2} m \left( \frac{r_0^2 v_0^2}{r^2} \right) - \frac{mr_0 v_0^2}{r}$$

9) Allure de la fonction  $E_{Peff}(r)$  :

$$\text{Pour } r \rightarrow 0, E_{Peff}(r) \approx \frac{1}{2} m \left( \frac{r_0^2 v_0^2}{r^2} \right) \rightarrow \infty \quad \text{Pour } r \rightarrow \infty, E_{Peff}(r) \approx -\frac{mr_0 v_0^2}{r} \rightarrow 0^-$$

La fonction  $E_{Peff}(r)$  admet un minimum pour :

$$\left( \frac{dE_{Peff}(r)}{dr} \right)_{r_e} = 0$$

En explicitant :

$$\frac{dE_{\text{Peff}}(r)}{dr} = -m \left( \frac{r_0^2 v_0^2}{r^3} \right) + \frac{m r_0 v_0^2}{r^2}$$

$$\left( \frac{dE_{\text{Peff}}(r)}{dr} \right)_{r_e} = -m \left( \frac{r_0^2 v_0^2}{r_e^3} \right) + \frac{m r_0 v_0^2}{r_e^2} = 0$$

La fonction  $E_{\text{Peff}}(r)$  est minimale pour  $r_e = r_0$ .

10) Explicitons l'énergie mécanique  $E_m(M)_{RH}$  :

$$E_m(M)_{RH} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \left( \frac{r_0^2 v_0^2}{r^2} \right) - \frac{m r_0 v_0^2}{r} = \text{cte}$$

En dérivant par rapport au temps :

$$\frac{dE_m(M)_{RH}}{dt} = m \dot{r} \ddot{r} - m \left( \frac{r_0^2 v_0^2}{r^3} \right) \dot{r} + \frac{m r_0 v_0^2 \dot{r}}{r^2} = 0$$

On établit l'équation différentielle vérifiée par  $r(t)$  :

$$\ddot{r} - \frac{r_0^2 v_0^2}{r^3} + \frac{r_0 v_0^2}{r^2} = 0$$

Cette équation différentielle est non linéaire...mais nous savons que  $r(t) = r_0 + r_1(t)$  avec  $|r_1(t)| \ll r_0$  :

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{(r_0 + r_1(t))^2} = \frac{1}{r_0^2} \left( 1 + \frac{r_1(t)}{r_0} \right)^{-2} = \frac{1}{r_0^2} \left( 1 - 2 \left( \frac{r_1(t)}{r_0} \right) \right)$$

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{(r_0 + r_1(t))^3} = \frac{1}{r_0^3} \left( 1 + \frac{r_1(t)}{r_0} \right)^{-3} = \frac{1}{r_0^3} \left( 1 - 3 \left( \frac{r_1(t)}{r_0} \right) \right)$$

En notant que  $\dot{r} = \dot{r}_1$  et en explicitant :

$$\ddot{r}_1 - \frac{v_0^2}{r_0} \left( 1 - 3 \left( \frac{r_1(t)}{r_0} \right) \right) + \frac{v_0^2}{r_0} \left( 1 - 2 \left( \frac{r_1(t)}{r_0} \right) \right) = 0$$

On établit l'équation différentielle du mouvement :

$$\ddot{r}_1 + \frac{v_0^2}{r_0^2} r_1 = 0$$

On reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique :

$$\ddot{r}_1 + \omega^2 r_1 = 0 \quad \text{avec} \quad \omega = \frac{v_0}{r_0}$$

11) La solution de cette équation différentielle est du type :

$$r_1(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

Compte tenu des conditions initiales  $r_1(0) = 0$  et  $\dot{r}_1(0) = v_1$ ,  $A = 0$  et  $B = v_1/\omega$  soit :

$$r_1(t) = \frac{v_1}{\omega} \sin(\omega t) \text{ et } r(t) = r_0 + \frac{v_1}{\omega} \sin(\omega t)$$

A son aphélie :

$$r_{max} = r_0 + \frac{|v_1|}{\omega} = r_0 \left( 1 + \frac{|v_1|}{v_0} \right) \text{ avec } \omega = \frac{v_0}{r_0}$$

On souhaite que l'aphélie de l'orbite de Dart coïncide avec le périhélie de l'orbite de Didymos donné à la question 2)  $r_{min} = 1,01 \cdot r_0$  :

$$r_0 \left( 1 + \frac{|v_1|}{v_0} \right) = 1,01 \cdot r_0$$

$$\frac{|v_1|}{v_0} = 0,01 \text{ l'hypothèse } |v_1| \ll v_0 \text{ est vérifiée}$$

12) A.N. :  $|v_1| = 0,01 \cdot v_0 = 3,0 \cdot 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

13) Période de l'orbite de Dart :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi r_0}{v_0}$$

A.N. :  $T = T_0$  période de rotation de la Terre autour du Soleil...

Nous aurions pu retrouver ce résultat en appliquant directement la 3<sup>ème</sup> loi de Kepler.

14) Soit  $t_1$  l'instant où Dart atteint sa cible :  $r(t_1) = r_0 + \frac{v_1}{\omega} \sin(\omega t_1) = r_{1max}$  avec :

$$\sin(\omega t_1) = \sin\left(\frac{3\omega T}{4}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$$

pour que  $r(t_1) = r_{max}$  il faut que  $v_1 < 0$  : l'impulsion radiale est donc **dirigée vers le Soleil**.

### Seconde méthode : constante du mouvement

15) Si le vecteur  $\vec{T}$  est constant, sa dérivée est nulle :

$$\left(\frac{d\vec{T}}{dt}\right)_{RH} = \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{RH} - B \left(\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}\right)_{RH} = \vec{0}$$

En appliquant le principe fondamental de la dynamique à Dart assimilé à un point matériel  $M(m)$  dans  $R_H$  :

$$m \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{RH} = -\frac{GmM_S}{r^2} \vec{u}_r$$

En explicitant :

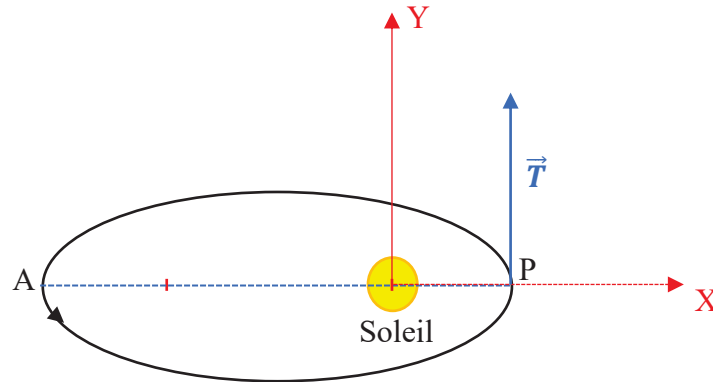
$$\left(\frac{d\vec{T}}{dt}\right)_{RH} = \left(-\frac{GM_S}{r^2} + B\dot{\theta}\right) \vec{u}_r$$

Le vecteur  $\vec{T}$  est constant pour :

$$B = \frac{GM_S}{r^2 \dot{\theta}} = \frac{GmM_S}{L} = \text{cte}$$

16) Pour une orbite circulaire de rayon  $r_0$  ; en explicitant :  $B = v_0$  et  $\vec{T} = \vec{0}$ .

17) Allure de l'orbite elliptique :



Pour déterminer la direction du vecteur  $\vec{T} = \vec{v} - B\vec{u}_\theta = \vec{cte}$ , explicitons ce vecteur en P (ou en A) :

En P :  $\vec{T} = v_P\vec{u}_\theta - B\vec{u}_\theta$  donc le vecteur  $\vec{T}$  est porté par l'axe OY. Que peut on dire de son sens ? Pour cela déterminons le signe de T en P :

$$T = v_P - \frac{GmM_S}{L}$$

avec  $L = mr_P v_P$  et :

$$T = v_P - \frac{GM_S}{r_P v_P}$$

Si la trajectoire de Dart était circulaire à la distance  $r_P$  du Soleil, sa vitesse serait :

$$v_c = \sqrt{\frac{GM_S}{r_P}} \text{ avec } v_c < v_P$$

En explicitant :

$$T = v_P \left( 1 - \frac{v_c^2}{v_P^2} \right) > 0$$

18) Nous avons montré que le moment cinétique est constant (cf 6)) donc  $L = mr_0 v_0$  et :

$$B = \frac{GmM_S}{L} = \frac{GM_S}{r_0 v_0} = v_0$$

Sachant le  $\vec{T}$  est un vecteur constant, explicitons ce vecteur au moment du lancement :

$$\vec{T} = \vec{v}(t=0) - B\vec{u}_\theta \text{ avec } \vec{v}(t=0) = v_0\vec{u}_\theta + v_1\vec{u}_r$$

$$\vec{T} = v_1\vec{u}_r \text{ soit } |\vec{T}| = |v_1|$$

19) Explicitons la norme du vecteur  $\vec{T}$  au périhélie et à l'aphélie :

$$T(P) = v_P - v_0 = |v_1| \text{ et } T(A) = -v_A + v_0 = |v_1|$$

On établit que :

$$v_P = v_0 + |v_1| \text{ et } v_A = v_0 - |v_1|$$

20) En explicitant le moment cinétique en A et en P, on établit que  $r_A v_A = r_P v_P$ . En explicitant :

$$r_A(v_0 - |v_1|) = r_P(v_0 + |v_1|)$$

Sachant que  $r_A + r_P = 2a$ , en explicitant  $r_P$  en fonction de  $r_A$  :

$$r_P = r_A \left( \frac{v_0 - |v_1|}{v_0 + |v_1|} \right)$$

$$r_A \left( 1 + \frac{v_0 - |v_1|}{v_0 + |v_1|} \right) = 2a$$

$$r_A = 2a \left( \frac{v_0 + |v_1|}{2v_0} \right) = a \left( 1 + \frac{|v_1|}{v_0} \right)$$

21) Nous avons établi à la question 7) que :

$$a = r_0 \left( 1 + \frac{v_1^2}{v_0^2} \right)$$

Sachant que  $|v_1| \ll v_0$ , en négligeant  $v_1^2/v_0^2$  devant 1, on vérifie que  $a = r_0$  et que :

$$r_A = r_0 \left( 1 + \frac{|v_1|}{v_0} \right)$$

On retrouve bien l'expression de  $r_{max}$  établie précédemment...

### Problème 3 La marche du berger landais sur échasses

#### A Étude de la phase d'oscillation gauche

**A.1** On applique le théorème scalaire du moment cinétique à la jambe gauche ( $j_g$ ) par rapport à l'axe ( $F_g y$ ) dans le référentiel du buste supposé galiléen sachant que la jambe gauche est soumise à :

- l'action mécanique de l'articulation au niveau du fémur modélisable par une liaison pivot idéale, dont le moment par rapport à ( $F_g y$ ) est nul ;
- son poids.

Le moment du poids par rapport à ( $F_g y$ ) est  $\mathcal{M}_{F_g y}(\vec{P}) = -d\|\vec{P}\|$  où  $d = \Delta \times \sin(\theta)$  représente le bras de levier, soit  $\mathcal{M}_{F_g y}(\vec{P}) = -\Delta \times \sin(\theta) \times m_j g$

On en déduit  $\frac{dL_F}{dt} = J_F \ddot{\theta} = -\Delta m_j g \sin(\theta)$ , soit :

$$\ddot{\theta} + \frac{\Delta m_j g}{J_F} \sin(\theta) = 0$$

Autre méthode de détermination :  $\mathcal{M}_{F_g y}(\vec{P}) = (\overline{F_g G_{j_g}} \wedge \vec{P}) \cdot \vec{u}_y$  soit

$$\mathcal{M}_{F_g y}(\vec{P}) = (\Delta(-\sin(\theta)\vec{u}_x - \cos(\theta)\vec{u}_z) \wedge (-m_j g \vec{u}_z)) \cdot \vec{u}_y = -\Delta m_j g \sin(\theta)$$

**A.2** Des oscillations isochrones sont des oscillations dont la période ne dépend pas de l'amplitude.

**A.3** Dans l'approximation des petits angles,  $\sin(\theta) \simeq \theta$ , on a un oscillateur harmonique : le mouvement est donc bien isochrone.

**A.4** D'après l'équation du mouvement, la pulsation  $\omega_{os}$  est la pulsation propre de l'oscillateur harmonique définie par

$$\omega_{os} = \sqrt{\frac{\Delta m_j g}{J_F}}$$

La durée de la phase d'oscillation correspond à une demi-période (la vitesse angulaire étant initialement nulle, la position symétrique est atteinte après une demi-période), soit

$$\tau_{os} = \pi \sqrt{\frac{J_F}{\Delta m_j g}}$$

#### B Étude de la phase de double contact

**B.1** Le système ( $S$ ) est composé du buste ( $b$ ) et des deux jambes ( $j_g$  et  $j_d$ ).

Ainsi  $\Delta E_m = \Delta E_m(b) + \Delta E_m(j_g) + \Delta E_m(j_d)$  avec chaque  $\Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_p$ .

D'après l'énoncé,  $\Delta E_c(b) = 0$ ,  $\Delta E_p(b) = m_b g h$ ,  $\Delta E_p(j_g) = \Delta E_p(j_d) = 0$  et  $\Delta E_c(j_g) = \Delta E_c(j_d) = \frac{1}{2} J_O (\Omega^2(\tau_{dc}) - \Omega^2(0)) = \frac{1}{2} J_O \Omega^2(\tau_{dc})$ . On obtient finalement

$$\Delta E_m = J_O \Omega^2(\tau_{dc}) + m_b g h$$

**B.2** Soit  $h$  la variation d'altitude de  $G_b$  telle que  $h = \ell_j - \ell_j \cos(\theta_a)$ . Pour des petits angles  $\theta_a$  on a, à l'ordre 2 :  $\cos(\theta_a) \simeq 1 - \frac{\theta_a^2}{2}$  et  $\sin(\theta_a) = \frac{p}{\ell_j} \simeq \theta_a$ . On en déduit

$$h \simeq \ell_j - \ell_j \left(1 - \frac{\theta_a^2}{2}\right) \simeq \ell_j \frac{\theta_a^2}{2} \simeq \ell_j \frac{p^2}{2\ell_j^2}$$

soit

$$h \simeq \frac{p^2}{2\ell_j}$$

#### C Coût énergétique et pas optimal de la marche ordinaire

**C.1** Le théorème de la puissance mécanique indique que  $\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}$ , où  $\mathcal{P}$  est la puissance des forces non conservatives (ici limitées à la puissance des muscles).

**C.2** D'après ce qui précède  $\mathcal{P} = \frac{\Delta E_m}{\tau_{dc}} = \frac{J_O \Omega^2(\tau_{dc})}{\tau_{dc}} + \frac{m_b g h}{\tau_{dc}}$  avec :

- $v_{dc} = \frac{p}{\tau_{dc}}$
- $\frac{J_O \Omega^2(\tau_{dc})}{\tau_{dc}} = \frac{J_O \omega_{os}^2}{\tau_{dc}} = \frac{J_O \Delta m_j g}{\tau_{dc} J_F} = \frac{J_O \Delta m_j g}{J_F} \frac{v_{dc}}{p} = \left( \frac{J_O m_j \Delta}{J_F p} \right) g v_{dc}$
- $\frac{m_b g h}{\tau_{dc}} = \frac{m_b g}{\tau_{dc}} \frac{p^2}{2\ell_j} = \frac{m_b g}{\tau_{dc}} \frac{p}{2\ell_j} v_{dc} \tau_{dc} = \frac{m_b p}{2\ell_j} g v_{dc}$

D'où finalement

$$\mathcal{P} = \left( \frac{J_O m_j \Delta}{J_F p} + \frac{m_b p}{2\ell_j} \right) g v_{dc}$$

**C.3** Soit  $p_{\text{opt}}$  le pas qui minimise  $\mathcal{P}$ . On calcule  $\frac{d\mathcal{P}}{dp} = \left( -\frac{J_O m_j \Delta}{J_F p^2} + \frac{m_b}{2\ell_j} \right) g v_{dc}$ .

La dérivée s'annule pour  $p_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{J_O m_j \Delta 2\ell_j}{J_F m_b}}$ .

**C.4** Avec  $\ell_j = 1$  m,  $m_j = 10$  kg,  $m_b = 60$  kg, et dans le cas où  $\Delta = \frac{\ell_j}{2}$  et  $J_O = J_F$ , on a  $p_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{m_j \ell_j^2}{m_b}}$ .

A.N. :  $p_{\text{opt}} = 0,4$  m.

## D Pas optimal avec des échasses

**D.1**  $\Delta$ ,  $m_j$  et  $m_b$  sont évidemment inchangés. De même, le moment d'inertie  $J_F$  d'une jambe par rapport à l'extrémité  $F$  est inchangée car on suppose la masse de l'échasse négligeable devant la masse de la jambe. Par contre la longueur  $\ell_j$  de la jambe est remplacée par la longueur  $\ell_j + \ell_e$  de la jambe équivalente et le moment d'inertie  $J_O$  de la jambe par rapport à l'axe ( $Oy$ ) est remplacé par le moment  $J_E$  par rapport à l'axe ( $Ey$ ).

**D.2** Par analogie avec ce qui précède on a

$$p'_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{J_E m_j \Delta 2(\ell_j + \ell_e)}{J_F m_b}}$$

On en déduit le rapport  $\frac{p'_{\text{opt}}}{p_{\text{opt}}} = \sqrt{\frac{J_E m_j \Delta 2(\ell_j + \ell_e)}{J_F m_b}} \sqrt{\frac{J_F m_b}{J_O m_j \Delta 2\ell_j}}$  soit

$$\frac{p'_{\text{opt}}}{p_{\text{opt}}} = \sqrt{\frac{J_E(\ell_j + \ell_e)}{J_O \ell_j}} = \sqrt{\frac{J_E}{J_O} \left( 1 + \frac{\ell_e}{\ell_j} \right)}$$

**D.3** D'après les expressions des moments d'inertie fournies on a  $\frac{J_E}{J_O} = 1 + 3\frac{\ell_e}{\ell_j} + 3\frac{\ell_e^2}{\ell_j^2}$  donc

$$\frac{p'_{\text{opt}}}{p_{\text{opt}}} = \sqrt{\left( 1 + 3\frac{\ell_e}{\ell_j} + 3\frac{\ell_e^2}{\ell_j^2} \right) \left( 1 + \frac{\ell_e}{\ell_j} \right)}$$

**D.4** Dans le cas d'un berger adulte de longueur de jambe  $\ell_j = 1$  m, monté sur des échasses de longueur  $\ell_e = 1$  m on obtient  $\frac{p'_{\text{opt}}}{p_{\text{opt}}} = 4$ . Le pas optimal est donc multiplié par 4!

**D.5** Les constantes intervenant dans l'expression de la pulsation propre  $\omega_{os}$  sont inchangées donc la durée de la phase oscillante est identique avec ou sans échasses.

**D.6** Étant donné que la pulsation de la phase oscillante est inchangée le rapport des vitesses de déplacement du marcheur avec et sans échasses s'identifie au rapport des pas optimaux :  $\frac{v'_{dc}}{v_{dc}} = \frac{p'_{\text{opt}}}{p_{\text{opt}}} = 4$

Les échasses permettent bien d'augmenter significativement la vitesse de marche des bergers. Il est donc pertinent de qualifier cette pratique de « marche à pied augmentée ».