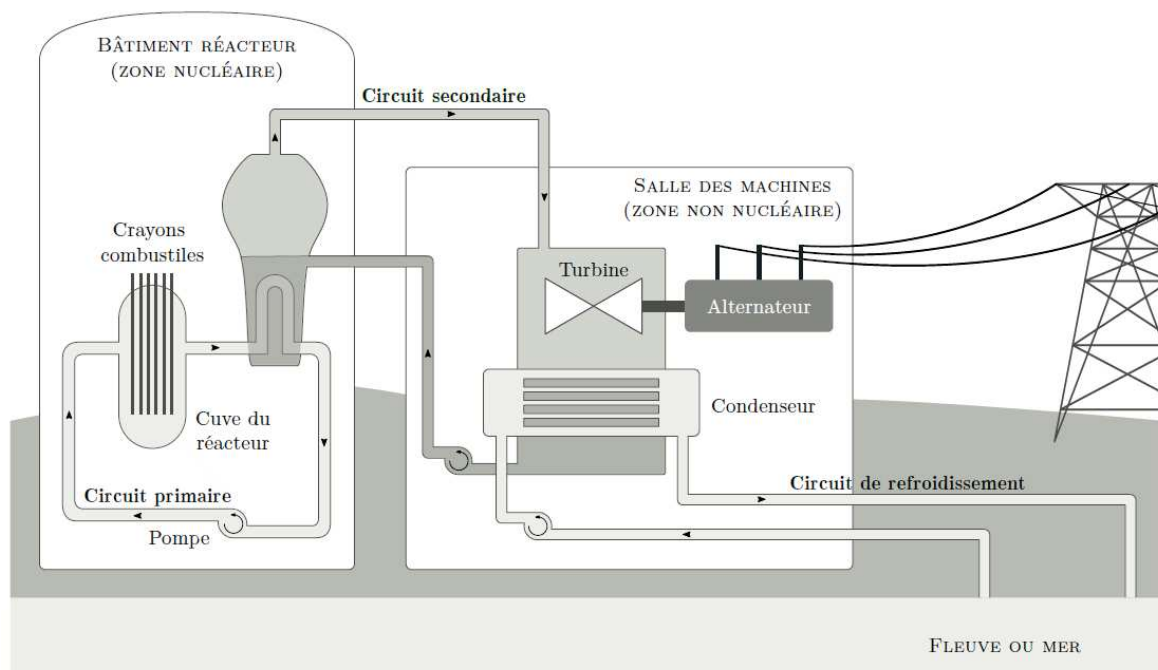


Durée de l'épreuve : 3h

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans l'appréciation **des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

### Problème 1 : Etude du circuit secondaire d'une centrale nucléaire

Une centrale nucléaire utilise l'énergie dégagée par la fission nucléaire des atomes d'uranium placés au cœur du réacteur. La chaleur dégagée par la fission est transférée à un fluide caloporteur, généralement de l'eau qui circule dans le circuit primaire. L'eau du circuit primaire est portée à très haute pression par l'effet des réactions de fission nucléaire qui ont lieu au sein du cœur du réacteur. Elle passe ensuite dans un pressuriseur qui maintient sa pression constante et égale à  $p = 155$  bar, puis effectue un échange thermique avec le circuit secondaire dans un générateur de vapeur : l'énergie thermique dégagée par l'eau du premier circuit vaporise alors l'eau du second, qui fait ensuite tourner plusieurs turbines génératrices d'énergie mécanique, elle-même enfin transformée en énergie électrique par un alternateur. Dans ce problème, nous allons étudier quelques propriétés du circuit secondaire.



Principe d'un réacteur nucléaire. Librement adapté d'une illustration EDF

#### I. Préliminaire

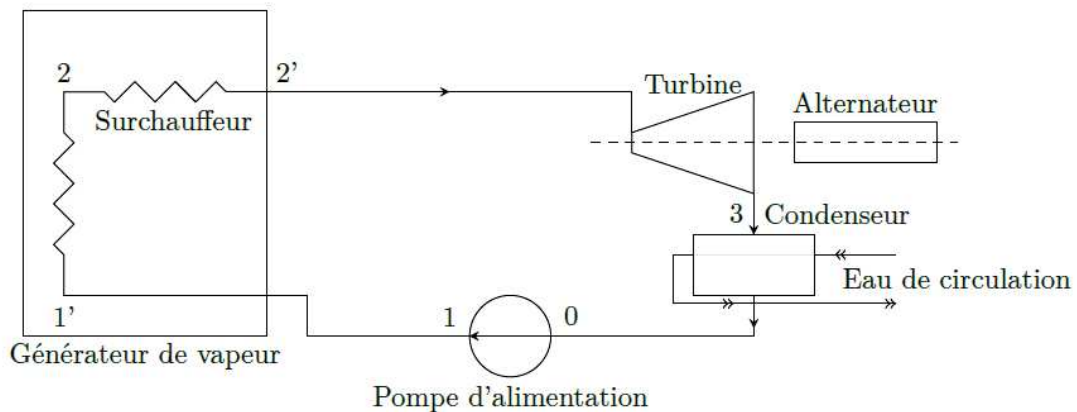
On considère un fluide en écoulement stationnaire, sans variation notable de son énergie mécanique, dans une machine. Il y entre dans l'état  $E$  (pression  $p_e$ , température  $T_e$ , enthalpie massique  $h_e$ ) et en sort dans l'état  $S$  (pression  $p_s$ , température  $T_s$ , enthalpie massique  $h_s$ ). On note  $w_u$  le travail utile massique et  $q$  le transfert thermique massique reçus algébriquement par le fluide lors de la traversée de la machine. 1) En effectuant un bilan thermodynamique sur un système judicieusement choisi, établir soigneusement la relation :

$$h_s - h_e = w_u + q$$

## II. Cycle de Hirn

On considère le circuit secondaire, décrit par la figure ci-dessous :

- la pompe d'alimentation porte l'eau liquide juste saturée (état 0) de la pression  $p_3 = 0,040$  bar du condenseur à la pression  $p_2 = 85,8$  bar du générateur de vapeur (GV) de façon isentropique (état 1).
- l'eau liquide entre ensuite dans le générateur de vapeur, où elle est chauffée de façon isobare jusqu'à la température  $T_2$  du changement d'état (état 1'- liquide juste saturant), puis est totalement vaporisée jusqu'à l'état 2 (vapeur saturante sèche). Le surchauffeur (2 - 2') fonctionne de façon isobare.
- la vapeur sèche produite (état 2') subit ensuite une détente isentropique dans une turbine calorifugée amenant le système dans l'état 3, à la température  $T_0$ .
- le mélange diphasé (état 3) pénètre ensuite dans le condenseur pour y être totalement condensé (état 0).



Cycle de Hirn

On se place en régime stationnaire. On suppose l'eau liquide incompressible et on néglige le travail consommé par la pompe devant les autres termes énergétiques de l'installation. Dans la suite, les grandeurs thermodynamiques indicées par  $i$  sont relatives à l'état  $i$ .

On donne  $T_0 \approx T_1 = 29^\circ\text{C}$ ,  $T_2 = 300^\circ\text{C}$  et  $T_{2'} = 500^\circ\text{C}$  ainsi qu'un extrait de tables thermodynamiques pour l'eau dans le tableau. Les données suivantes sont également fournies :

- enthalpie massique de vaporisation de l'eau à  $T_2$  :  $L_v(T_2) = 1404 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$
- enthalpie et entropie massiques respectives de la vapeur d'eau sèche à  $500^\circ\text{C}$  et  $85,8$  bar :  $h = 3391 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$  et  $s = 6,68 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ .
- variation d'entropie d'une phase condensée incompressible de capacité thermique  $C$  entre un état 1 et un état 2 :

$$\Delta S = C \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

Pression de vapeur saturante (bar)	Température ( $^\circ\text{C}$ )	Liquide juste saturé		Vapeur saturante sèche	
		$s$	$h$	$s$	$h$
85,8	300	3,25	1345	5,70	
0,040	29	0,42	121	8,47	2554

Quelques données thermodynamiques pour l'eau. L'enthalpie massique  $h$  est exprimée en  $\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$  et l'entropie massique en  $\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ .

2) Expliquer pourquoi  $T_0 \approx T_1$  et  $h_0 \approx h_1$ . Préciser l'allure d'une transformation isentropique dans le domaine liquide du diagramme des frigoristes ( $p, h$ ).

3) Donner le nom des différentes courbes du diagramme des frigoristes ( $p, h$ ) du document réponse et y représenter précisément le cycle décrit par le fluide.

4) Calculer, à partir de données du tableau pour plus de précision, le titre massique en vapeur ainsi que l'enthalpie massique de la vapeur à la sortie de la turbine. Positionner le point représentatif de cet état sur le diagramme des frigoristes du document réponse.

5) Définir et calculer l'efficacité  $\eta$  de ce cycle.

6) Etablir l'expression de l'efficacité de Carnot  $\eta_C$  d'une machine cyclique ditherme fonctionnant en moteur entre une source chaude à la température  $T_C$  et une source froide à la température  $T_F$ . La calculer en prenant respectivement pour  $T_F$  et  $T_C$  les températures minimale et maximale du fluide dans le circuit secondaire. Commenter en justifiant l'écart éventuel avec la valeur de l'efficacité obtenue à la question précédente.

### III. Cycle à double surchauffe

Les gouttes d'eau liquide peuvent endommager la turbine. Aussi, est-il avantageux d'utiliser une turbine à deux corps permettant d'obtenir un titre massique en vapeur en sortie de turbine proche de 1 grâce à une double surchauffe. Le cycle de Hirn précédent est modifié :

- de l'eau (état 1) est admise dans le générateur de vapeur (GV) d'où elle sort à l'état de vapeur saturante sèche (état 2) ;
- elle passe ensuite dans le premier surchauffeur isobare (2 - 2') pour être détendue dans la turbine haute pression (HP) (2' - 4) ;
- la vapeur sèche (état 4) est envoyée dans un second surchauffeur isobare (4 - 4') pour être ensuite détendue dans l'étage de turbine basse pression (BP) (4' - 5). Le titre massique en vapeur dans l'état 5 est sensiblement égal à 1 ;
- le fluide dans l'état 5 se condense totalement à la température  $T_0$  dans le condenseur isobare (5 - 0) ;
- le liquide juste saturé (état 0) est ensuite comprimé de façon isentropique à la pression  $p_2$  du générateur de vapeur (état 1).

Les détenteurs dans les turbines, calorifugées, sont supposées isentropiques. On se place encore une fois en régime stationnaire et on a toujours  $T_0 \approx T_1 = 29^\circ \text{C}$ ,  $T_2 = 300^\circ \text{C}$  et  $T_{2'} = 500^\circ \text{C}$ . De plus  $T_4 = 300^\circ \text{C}$  et  $T_{4'} = 500^\circ \text{C}$ .

7) Représenter précisément le cycle décrit par le fluide dans le diagramme des frigoristes du document réponse. Définir et calculer l'efficacité de ce cycle.

Document réponse : à rendre avec la copie

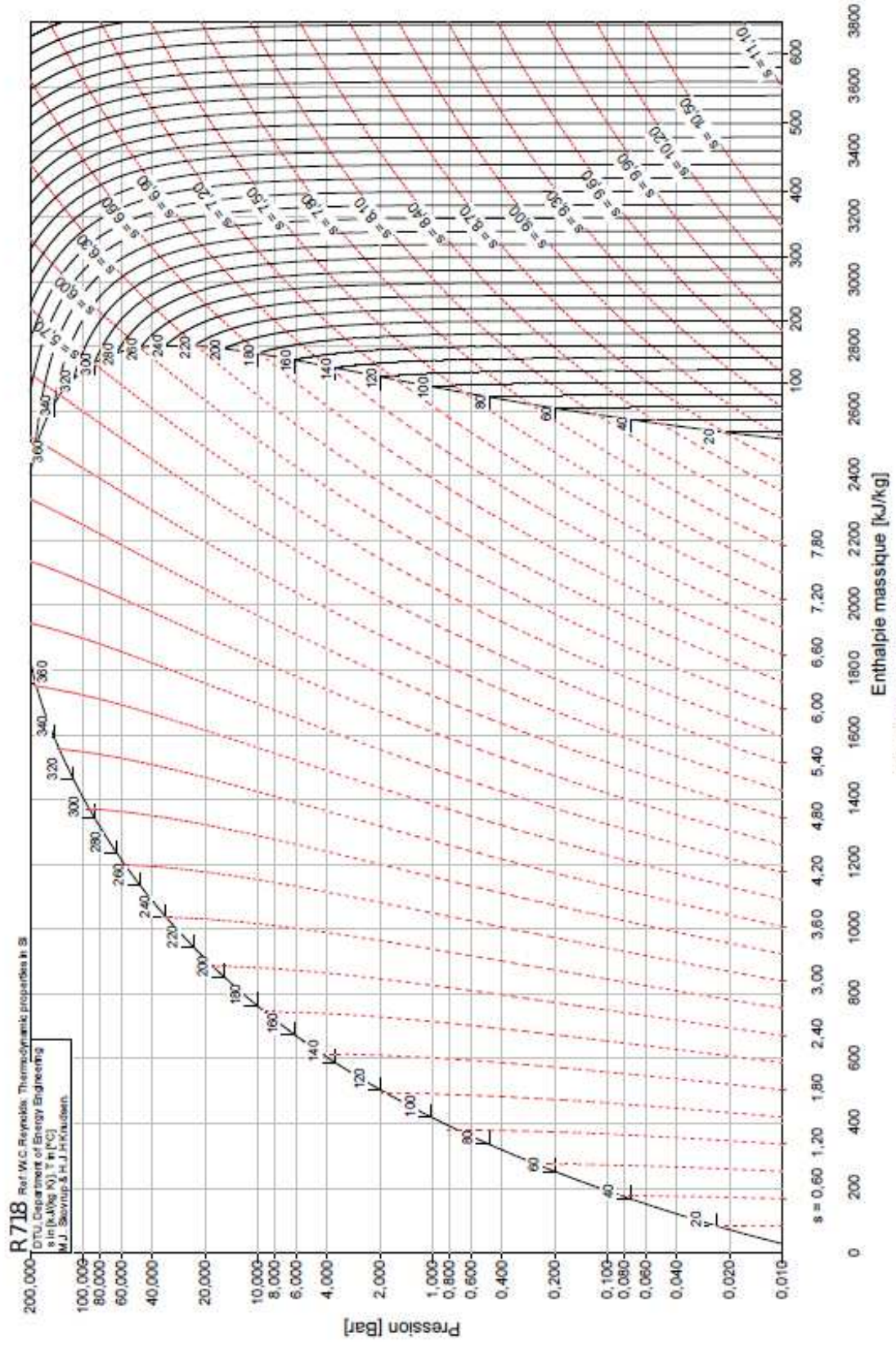


Diagramme des frigorigères.  
 La pression est exprimée en bar, l'entropie massique en kJ.kg<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup>, l'enthalpie massique en kJ.kg<sup>-1</sup> et la température en °C.

## Problème 2 : Déviation d'un astéroïde par percussion...

L'impact d'un astéroïde ou d'une comète sur la Terre pourrait engendrer une catastrophe planétaire. Dans le cadre d'un programme mondial de défense planétaire, les astronomes recensent les géocroiseurs, ces objets célestes susceptibles d'entrer en collision avec la Terre. En cas de danger, une des solutions envisagées est de dévier la trajectoire de l'objet céleste en le percutant avec un engin spatial envoyé depuis la Terre.

Afin de valider cette solution, l'agence spatiale américaine a lancé la mission DART, acronyme anglais signifiant "test de déviation d'un astéroïde double". La cible choisie est un astéroïde nommé Dimorphos, en orbite (à une altitude d'environ un kilomètre) autour d'un autre astéroïde plus gros nommé Didymos. La modification observée de la période de révolution de Dimorphos autour de Didymos à la suite de l'impact a montré que celui-ci pouvait avoir un effet significatif, et que la déviation par percussion est une solution envisageable pour dévier la trajectoire d'un géocroiseur.

Ce problème décrit plusieurs aspects de la mission DART. Dans la partie I, on caractérise l'orbite de Didymos autour du Soleil. Dans la partie II, on montre comment lancer un engin spatial (qu'on nomme DART) depuis la Terre pour qu'il entre en collision avec Dimorphos.

On supposera dans tout ce problème que la Terre est en mouvement circulaire uniforme autour du Soleil à la distance  $r_0 = 150 \times 10^6$  km et à la vitesse  $v_0 = 30 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$ . On supposera également que l'orbite de Didymos est dans le même plan que celle de la Terre, et parcourue dans le même sens.

### Rappel : formule des développements limités

pour  $x \ll 1$ ;  $(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x$  au premier ordre en  $x$

## I – Orbite de Didymos autour du Soleil

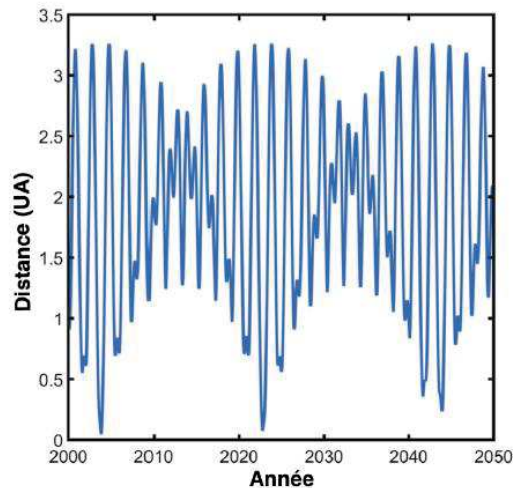


FIGURE 1 – Évolution de la distance séparant la Terre de Didymos entre les années 2000 et 2050, en unités de la distance Terre-Soleil  $r_0$ , dite Unité Astronomique. [Extrait de “Trajectory options for the DART mission”, par J. A. Atchison et al., *Acta Astronautica* (2016), vol. 123, p. 330.]

Dans cette partie préliminaire, nous allons, grâce à la figure 1, estimer quelques caractéristiques de l’orbite de Didymos.

1. Montrer que le mouvement d’une planète ou d’un astéroïde soumis à l’attraction du Soleil décrit une trajectoire plane.
2. Didymos décrit une orbite elliptique autour du Soleil. Sa distance minimale au Soleil (correspondant au point de l’orbite dit “périhélie”) est  $r_{\min} = 1,01 r_0$ . Le fait que  $r_{\min}$  soit très proche de  $r_0$  explique que Didymos passe parfois très près de la Terre, comme on le voit sur la figure 1, notamment en 2022, qui est l’année choisie pour l’impact. Dédurre de la figure une estimation du demi-grand axe de l’orbite de Didymos.
3. Dédurre de la valeur du demi-grand axe une estimation de la période  $T$  de révolution de Didymos autour du Soleil, en années.
4. Validez votre estimation de  $T$  en exploitant les données de la figure 1.

## II – Orbite de DART autour du Soleil

5. On lance l’engin spatial DART, de masse  $m$ , depuis la Terre. On l’envoie suffisamment loin pour qu’il échappe à l’attraction gravitationnelle de la Terre et ne soit plus sensible qu’à celle du Soleil, et on le place dans un premier temps sur la même orbite que la Terre. Que vaut alors sa vitesse autour du Soleil ?

On modifie ensuite légèrement l’orbite de DART afin qu’il atteigne sa cible. Pour cela, on lui communique pendant un bref instant une impulsion parallèle à la direction du Soleil, qui lui donne une vitesse radiale  $v_1$ , avec  $|v_1| \ll v_0$ , sans changer sa vitesse orthoradiale. Sous l’effet de cette impulsion, la trajectoire n’est plus circulaire, mais elliptique.

6. Quelle est la variation de son moment cinétique par rapport au Soleil ?

7. Quelle est la modification de son énergie mécanique par rapport au Soleil ? En déduire la variation du demi-grand axe au second ordre en  $|v_1|/v_0$

Nous allons maintenant étudier en détail la modification de la trajectoire par deux méthodes.

### Première méthode : utilisation de l'énergie potentielle effective

8. On rappelle que le mouvement radial  $r(t)$  dans un champ de gravitation newtonien est celui d'une particule à une dimension soumise à une énergie potentielle effective  $E_{p,\text{eff}}(r)$ . Établir l'expression de  $E_{p,\text{eff}}(r)$  et l'exprimer en fonction de  $m$ ,  $r_0$ ,  $v_0$  et  $r$ .

9. Comment, à partir de l'énergie potentielle effective, retrouve-t-on le rayon de l'orbite circulaire ? Vérifiez que vous obtenez le résultat attendu.

10. On considère maintenant des trajectoires faiblement elliptiques, telles que  $r(t) = r_0 + r_1(t)$  avec, pour tout temps  $t$ ,  $|r_1(t)| \ll r_0$ . Pour ces trajectoires,  $r(t)$  présente des oscillations de faible amplitude autour de  $r_0$ . En utilisant l'expression de  $E_{p,\text{eff}}(r)$  obtenue plus haut, déterminer la pulsation  $\omega$  de ces petites oscillations en fonction de  $r_0$  et  $v_0$ .

11. On veut que l'aphélie de l'orbite de DART, défini comme le point de l'orbite où sa distance au Soleil est maximale, coïncide avec le périhélie de l'orbite de Didymos (voir question 2) ce qui permet un impact. Est-on bien dans le cadre de l'approximation faite à la question précédente ?

12. En utilisant l'expression de  $r_1(t)$ , déterminer la valeur numérique de  $|v_1|$  permettant de réaliser cet objectif.

13. Que vaut la période de la trajectoire elliptique de DART ? Comment aurait-on pu obtenir ce résultat sans calcul ?

14. L'impulsion radiale permettant à DART de passer sur une orbite elliptique lui a été communiquée le 24 décembre 2021. DART a atteint sa cible Dimorphos le 26 septembre 2022, soit trois quarts d'une année plus tard. En déduire si l'impulsion radiale était dirigée vers le Soleil ou dans le sens opposé.

### Seconde méthode : constantes du mouvement

On repère un point du plan de la trajectoire par un système de coordonnées polaires  $(r, \theta)$  centré sur le Soleil. On désigne par  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  les vecteurs unitaires de base.

15. On définit le vecteur  $\vec{T} = \vec{v} - B\vec{e}_\theta$ , où  $\vec{v}$  est le vecteur vitesse et  $B$  une constante. Montrer que pour une trajectoire donnée, il existe une valeur de  $B$  telle que le vecteur  $\vec{T}$  soit constant, et déterminer son expression, en y faisant apparaître le moment cinétique.

16. Déterminer  $B$  et  $\vec{T}$  pour l'orbite circulaire de rayon  $r_0$ .

17. Dessinez une orbite elliptique, en précisant la position du Soleil et le sens de parcours. Suivant lequel des deux axes de l'ellipse le vecteur  $\vec{T}$  est-il dirigé ? Précisez son sens sur votre dessin.

18. On applique maintenant ces résultats à l'orbite elliptique de DART après qu'une vitesse radiale  $v_1$  lui a été communiquée. Quelles sont les expressions de  $B$  et  $|\vec{T}|$  dans ce cas, en fonction de  $v_0$  et  $v_1$  ?

19. Déterminer la vitesse de DART au périhélie et à l'aphélie en fonction de  $v_0$  et  $v_1$ .

20. Quelle constante du mouvement permet de relier la vitesse à la distance au Soleil en ces deux points ? En déduire l'expression de la distance au Soleil à l'aphélie en fonction de  $r_0$ ,  $v_0$  et  $v_1$ .

21. Vérifier qu'on retrouve bien le résultat de la question 12 dans la limite où  $|v_1| \ll v_0$ .

### Problème 3 La marche du berger landais sur échasses

Afin de parcourir de longues distances dans la lande et pour surveiller leurs troupeaux de moutons, les bergers landais utilisaient des échasses (Figure 1). Les premiers témoignages de cette pratique remontent au XVIIIe siècle. Celle-ci a progressivement disparu jusqu'au début du XXe siècle avec l'extension de la forêt qui marqua la fin du pastoralisme. De nos jours, des groupes folkloriques d'échassiers s'attachent à perpétuer et à faire revivre ce patrimoine culturel landais.



Figure 1 : Berger landais surveillant son troupeau de moutons du haut de ses échasses.

Les échasses sont constituées de deux pièces de bois : l'escasse (« jambe » en patois landais) et le paouse pé (« repose pied »), fixé sur l'escasse, le plus souvent à une hauteur par rapport au sol comprise entre 90 cm et 1,20 m. Deux lanières de cuir sont prévues pour que l'échassier attache son pied et sa jambe à l'échasse. On se propose d'étudier la marche sur échasses en établissant quels paramètres mécaniques sont modifiés par rapport à la marche ordinaire et de déterminer s'il est pertinent de qualifier cette pratique de « marche à pied augmentée ». Commençons par décrire la marche ordinaire : la marche est une activité complexe, nécessitant l'action coordonnée de 48 muscles de contrôle de la position du tronc et des membres inférieurs afin de permettre au marcheur de se déplacer vers l'avant avec un rendement optimal.

Le cycle de la marche comprend deux phases pour chaque jambe : une phase de double contact et une phase d'oscillation, illustrées en figure 2 de l'annexe. Les schémas en figure 3a et 3b de cette annexe précisent les notations utiles à la description des phases de double contact et d'oscillation gauche.

La description du mouvement est menée dans le référentiel du sol supposé galiléen.

#### Phase de double contact :

À la date  $t = 0$ , la jambe droite prend appui sur le sol, en  $O_d$  (elle vient de terminer son oscillation) (figures 2 et 3a de l'annexe) ; elle est immobile à cet instant (sa vitesse angulaire de rotation est nulle :  $\Omega(0) = 0$ ) et se trouve inclinée d'un angle  $\theta = -\theta_a$  par rapport à la verticale ascendante ( $O_d z$ ). Grâce à l'action des muscles, elle amorce alors un mouvement de rotation à la vitesse angulaire variable  $\Omega(t)$  autour de l'axe ( $O_d y$ ) perpendiculaire au plan de figure ( $x O_d z$ ), tandis que la jambe gauche, elle aussi en appui sur le sol, en  $O_g$ , transfère le poids du corps sur la jambe droite : durant cette phase, de durée  $\tau_{dc}$ , l'énergie cinétique des deux jambes augmente et le centre de masse du buste s'élève. À la date  $t = \tau_{dc}$ , la jambe droite passe par la position verticale, tandis que la jambe gauche, libérée du poids du corps, quitte son appui au sol.

#### Phase d'oscillation gauche :

À partir de la date  $t = \tau_{dc}$  et jusqu'à la date  $t = \tau_{dc} + \tau_{os}$ , la jambe gauche, libérée de son appui au sol, opère, sous la seule action de son poids, une oscillation pendulaire de durée  $\tau_{os}$  autour de l'axe de son pivot fémoral ( $F_g y$ ) (figure 3b de l'annexe) (on suppose que la présence du sol ne gêne pas l'oscillation). Cette phase est concomitante de la phase d'appui unipode droit (nommée ainsi car seule la

jambe droite est alors en appui au sol et poursuit sa rotation autour de l'axe  $(O_dy)$  jusqu'à la position  $\theta = \theta_a$  représentée en pointillés sur la figure 3a de l'annexe).

### Appuis au sol et définition du pas :

Après son appui au sol au point  $O_g$ , la jambe gauche reprend appui au sol en  $O'_g$ , à la distance  $2p$  devant  $O_g$  et à la distance  $p$  devant  $O_d$  :  $p = O_gO_d = O_dO'_g$  définit le pas de la marche.

Le cycle se poursuit alors en intervertissant les rôles des jambes gauche et droite.

On adopte le modèle mécanique simplifié suivant :

Chaque jambe est modélisée par une tige solide, de longueur  $\ell_j$ , de masse  $m_j$ , de centre de masse  $G_j$  et d'extrémité  $F$  (pivot fémoral). Ces points sont notés  $G_{jd}$  et  $F_d$  pour la jambe droite ( $j_d$ ) et  $G_{jg}$  et  $F_g$  pour la jambe gauche ( $j_g$ ). Le buste ( $b$ ) est modélisé comme un solide de masse  $m_b$  et de centre de masse  $G_b$ . L'ensemble  $(S) = \{(j_d) + (j_g) + (b)\}$  constitue le marcheur. On note :

- $\Delta = F_dG_{jd} = F_gG_{jg}$  la distance du centre de masse de la jambe à son extrémité,
- $\vec{g} = -g\vec{u}_z$  l'accélération de la pesanteur,
- $J_F$  le moment d'inertie de ( $j_d$ ) (respectivement de ( $j_g$ )) par rapport à l'axe  $(F_dy)$  (respectivement  $(F_gy)$ ),
- $J_O$  le moment d'inertie de ( $j_d$ ) (respectivement de ( $j_g$ )) par rapport à l'axe  $(O_dy)$  (respectivement  $(O_gy)$ ).

## A Étude de la phase d'oscillation gauche

Soit  $\theta(t)$  la position angulaire de la jambe gauche ( $j_g$ ) par rapport à la verticale ascendante (figure 3b de l'annexe).

**A.1** En appliquant le théorème du moment cinétique à ( $j_g$ ) dans le référentiel du buste supposé galiléen, établir l'équation différentielle vérifiée par  $\theta(t)$  pendant cette phase d'oscillation.

**A.2** Définir ce que sont des oscillations isochrones.

**A.3** Dans l'approximation des petits angles, le mouvement de ( $j_g$ ) est-il isochrone ?

**A.4** Exprimer, dans cette approximation, la pulsation  $\omega_{os}$  et la durée  $\tau_{os}$  de cette phase oscillante en fonction de  $m_j$ ,  $J_F$ ,  $g$  et de  $\Delta$ .

## B Étude de la phase de double contact

Afin d'évaluer le coût énergétique de la marche, on adopte les quatre hypothèses suivantes lors de la phase de double contact :

- le buste est animé d'un mouvement de translation quasi-uniforme, de vitesse moyenne  $\vec{v}_{dc} \simeq v_{dc}\vec{u}_x$  avec  $v_{dc} = \frac{p}{\tau_{dc}}$  (la composante verticale de  $\vec{v}_{dc}$  est donc négligée).
- Les variations d'énergie potentielle de pesanteur de ( $j_d$ ) et de ( $j_g$ ) sont négligées.
- Les variations d'énergie cinétique de ( $j_d$ ) et de ( $j_g$ ) sont supposées égales.
- Le mouvement de rotation de ( $j_d$ ) autour de  $(O_dy)$  s'effectue à la vitesse angulaire variable  $\Omega(t)$ , avec  $\Omega(t=0) = 0$ .

On note  $h = z_{G_b(\tau_{dc})} - z_{G_b(0)}$  la variation d'altitude du point  $G_b$  entre les instants  $t = 0$  et  $t = \tau_{dc}$  (figure 3a de l'annexe).

**B.1** Exprimer la variation  $\Delta E_m$  de l'énergie mécanique de  $(S)$  entre ces deux instants, en fonction de  $J_O$ ,  $\Omega(\tau_{dc})$ ,  $m_b$ ,  $g$  et de  $h$ .

**B.2** Montrer que, pour des petits angles  $\theta_a$ , on a :

$$h \simeq \frac{p^2}{2\ell_j}$$

## C Coût énergétique et pas optimal de la marche ordinaire

**C.1** En supposant quasi-constante la puissance  $\mathcal{P}$  fournie par les muscles pendant la phase de double contact, on évalue  $\mathcal{P}$  par  $\mathcal{P} = \frac{\Delta E_m}{\tau_{dc}}$ . Rappeler l'énoncé du théorème de la mécanique dont découle cette relation d'évaluation de  $\mathcal{P}$ .

**C.2** En supposant des conditions de marche telles que  $\Omega(\tau_{dc}) = \omega_{os}$ , avec  $\omega_{os}$  la pulsation trouvée à la question A.4, montrer que :

$$\mathcal{P} = \left( \frac{J_O m_j \Delta}{J_F p} + \frac{m_b p}{2\ell_j} \right) g v_{dc}$$

**C.3** Obtenir l'expression du pas  $p_{opt}$  qui minimise  $\mathcal{P}$ .

**C.4** Calculer  $p_{opt}$  avec  $\ell_j = 1$  m,  $m_j = 10$  kg,  $m_b = 60$  kg et dans le cas d'une jambe à répartition de masse uniforme pour laquelle on a alors  $\Delta = \frac{\ell_j}{2}$  et  $J_O = J_F$ .

## D Pas optimal avec des échasses

Considérons maintenant un berger monté sur ses échasses. Chacune d'elles est modélisée comme une tige de masse négligeable, de longueur  $\ell_e$ , solidarisée à la jambe et formant avec elle une « jambe équivalente » de longueur  $\ell_j + \ell_e$ . On note  $E$  le point de contact entre le sol et l'échasse et  $J_E$  le moment d'inertie, par rapport à l'axe  $(Ey)$ , de la « jambe équivalente ».

**D.1** Parmi les paramètres intervenant dans l'expression de  $p_{opt}$  obtenue à la question C.3, indiquer lesquels sont inchangés par rapport au cas sans échasses et lesquels sont à modifier. On précisera ces modifications.

**D.2** En déduire l'expression de  $p'_{opt}$  puis donner le rapport  $\frac{p'_{opt}}{p_{opt}}$  en fonction de  $\frac{J_E}{J_O}$  et de  $\frac{\ell_e}{\ell_j}$ .

On donne ci-dessous les expressions des moments d'inertie d'une jambe à répartition de masse uniforme, sans ou avec échasse, par rapport à l'axe de rotation au sol :

- Cas de la jambe seule (contact avec le sol en  $O$ ) :  $J_O = \frac{1}{3} m_j \ell_j^2$ ,
- Cas de la jambe avec échasse (contact avec le sol en  $E$ ) :  $J_E = \frac{1}{3} m_j (\ell_j^2 + 3\ell_e \ell_j + 3\ell_e^2)$

**D.3** Exprimer le rapport  $\frac{p'_{opt}}{p_{opt}}$  en fonction du seul rapport  $\frac{\ell_e}{\ell_j}$  dans le cas d'une jambe à répartition de masse uniforme.

**D.4** Calculer  $\frac{p'_{opt}}{p_{opt}}$  pour un berger adulte de longueur de jambe  $\ell_j = 1$  m, monté sur des échasses de longueur  $\ell_e = 1$  m.

**D.5** La durée de la phase oscillante est-elle changée avec les échasses ? Justifier.

**D.6** Des études statistiques ont montré, qu'une fois le pas optimal adopté, la vitesse moyenne de déplacement horizontal du marcheur sur un cycle est proportionnelle au pas optimal et à la pulsation de la phase oscillante. En déduire le rapport des vitesses de déplacement du marcheur avec et sans échasses. Commenter.

ANNEXE : Figures du problème 3

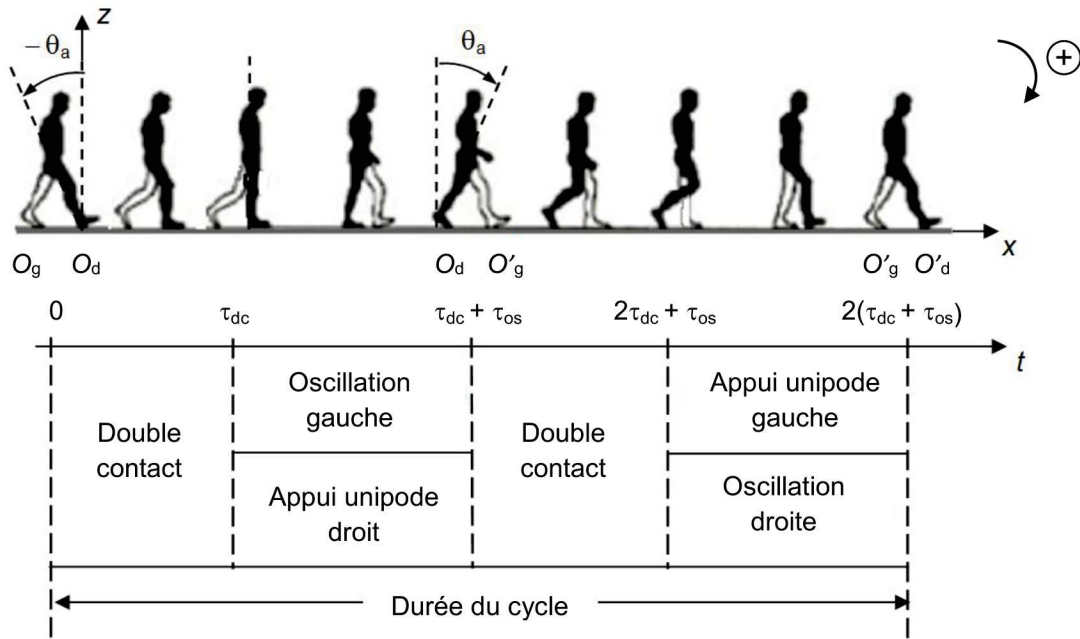


Figure 2 : Phases du cycle de la marche.

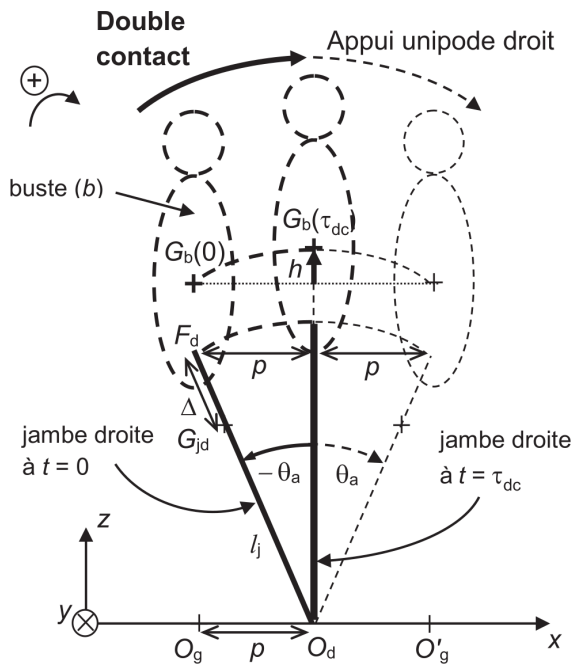


Figure 3a : Phase de double contact.

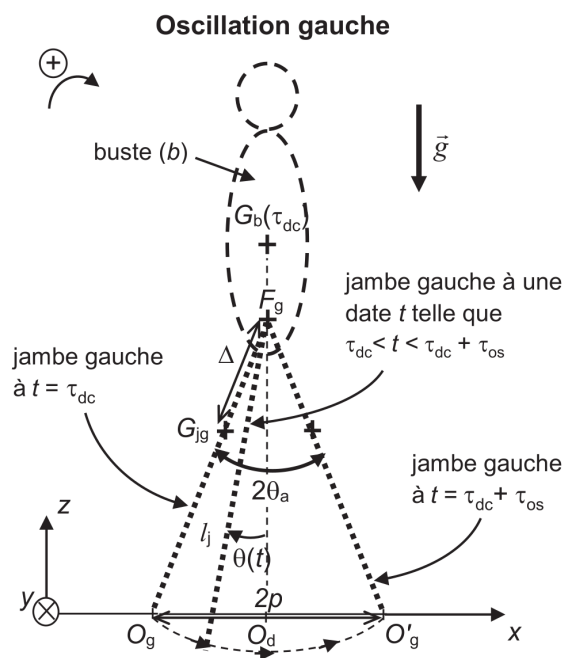


Figure 3b : Phase d'oscillation gauche.