

Problème 1 Champ géomagnétique

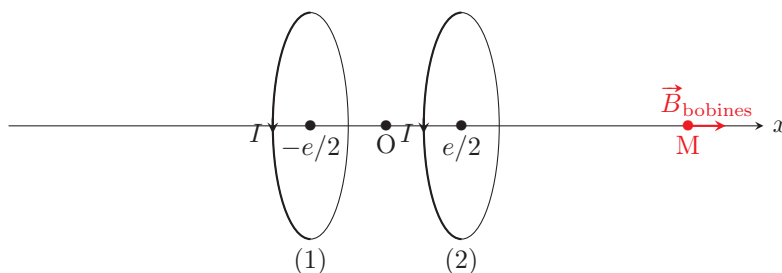
A Mesure du champ géomagnétique

A.1



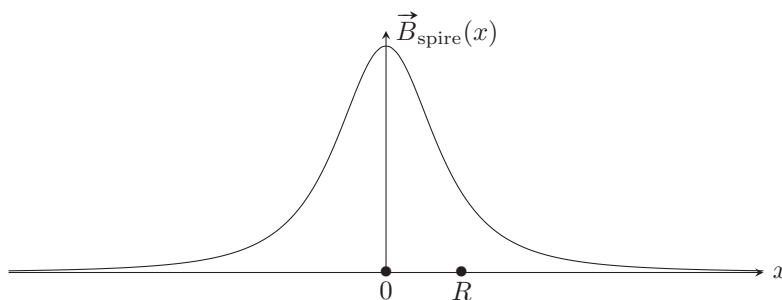
On obtient l'orientation de champ magnétique avec la « main droite ». Les doigts de la main entourant la spire donne le sens du courant et le pouce indique la direction du champ magnétique. Le champ magnétique sur l'axe de la spire pour $x > 0$ s'écrit $\vec{B}_{\text{spire}}(x) = \frac{\mu_0 I}{2R} \left(1 + \left(\frac{x}{R}\right)^2\right)^{-3/2} \vec{u}_x$

A.2

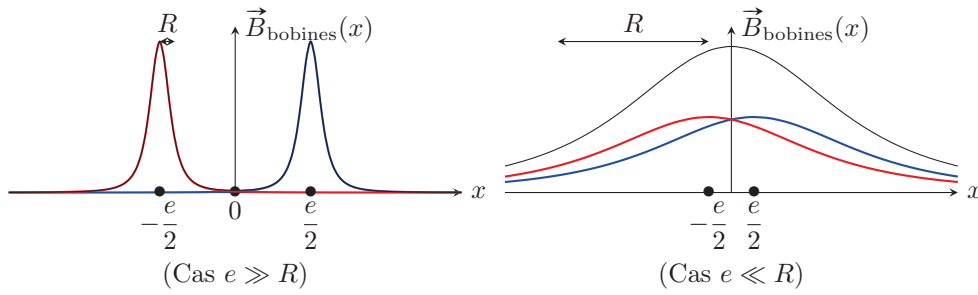


Par superposition le champ créé par la bobine 1 est sur l'axe en x de la forme (N spires dans le même plan centré en $-e/2$) $\vec{B}_1 = N\vec{B}_{\text{spire}}(x + e/2)\vec{u}_x$. De même $\vec{B}_2 = N\vec{B}_{\text{spire}}(x - e/2)\vec{u}_x$. Le champ total s'écrit alors $\vec{B}_{\text{bobines}}(M) = \frac{\mu_0 N I}{2R} \left[\left(1 + \left(\frac{x - e/2}{R}\right)^2\right)^{-3/2} + \left(1 + \left(\frac{x + e/2}{R}\right)^2\right)^{-3/2} \right] \vec{u}_x$

A.3 Pour une spire, la fonction est symétrique, centrée en zéro, maximale en $x = 0$ et tend vers zéro en $x = \pm\infty$ et la largeur de la courbe est de l'ordre de R :



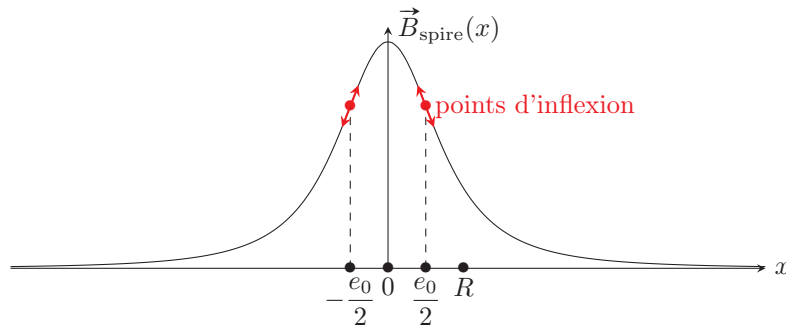
On distingue ainsi deux cas, suivant si les fonctions peuvent se superposer ou pas, ce qui correspond aux cas $e \ll e_0$ (cas d'une superposition complète, c'est comme si on avait une seule bobine en $x = 0$) ou $e \gg e_0$ (pas de superposition – séparation totale des deux champs). On note que forcément alors $e_0 \sim R$, c'est la seule échelle de longueur caractéristique du problème.



L'intérêt **pratique** du cas $e \sim e_0$ est d'avoir un cas intermédiaire *utile* : les deux champs **se superposent** (ce qui n'est pas le cas si $e \gg R$), et il y a de la **place** entre les deux bobines (ce qui ne serait pas le cas si $e \ll R$) pour pouvoir y mettre des systèmes sensibles au champ magnétique.

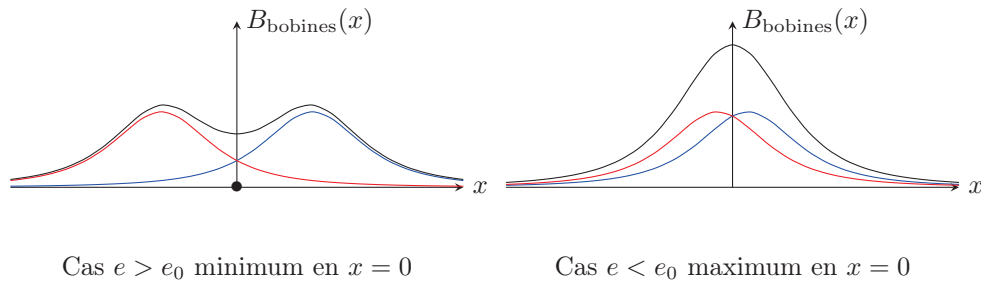
On démontre à la question suivante que le champ est relativement **uniforme** entre les deux bobines pour $e \sim e_0$, mais cela ne me semble pas être un intérêt *pratique*. En pratique si on veut avoir un champ vraiment uniforme, on prend un solénoïde. Mais cela coûte plus cher, et est en général plus petit, donc moins facile d'accès...

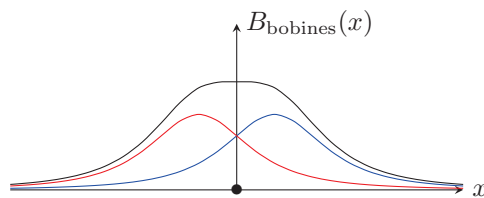
A.4 Pour une courbe $B_{\text{spire}}(x)$, il existe deux points d'inflexion répartis symétriquement autour de $x = 0$,



Le calcul mène aux positions $x = \pm \frac{R}{2}$ des points d'inflexion, mais ce n'était pas demandé.

- La courbe $B_{\text{bobines}}(x)$ est paire $\forall e$, donc toutes ses dérivées impaires en $x = 0$ sont nulles (les dérivées de chaque composante $B_{\text{spire}}\left(x \pm \frac{e}{2}\right)$ sont opposées en $x = 0$ et s'annulent)
- Pour justifier l'existence d'un point d'inflexion sans le calculer, il y a au moins deux méthodes
 - Pour une certaine valeur $e = e_0$, les points d'inflexion des composantes B_{spire} , symétriques par rapport à $x = 0$, dans B_{bobines} , se superposent en $x = 0$ et donc la dérivée seconde de la somme s'annule aussi. Par identification, les positions des points d'inflexion pour B_{spire} sont alors en $x = \pm \frac{e_0}{2}$.
 - Entre les deux cas limites de l'existence d'un minimum en $x = 0$ pour $B_{\text{bobines}}(x)$ (cas $e > e_0$ alors $B''_{\text{bobines}}(0) > 0$) et d'un maximum ($e < e_0$, $B''_{\text{bobines}}(0) < 0$), on a forcément un cas, pour un certain e que l'on identifie à e_0 , de dérivée seconde nulle en $x = 0$.





Cas $e = e_0 (= R)$ inflexion en $x = 0$

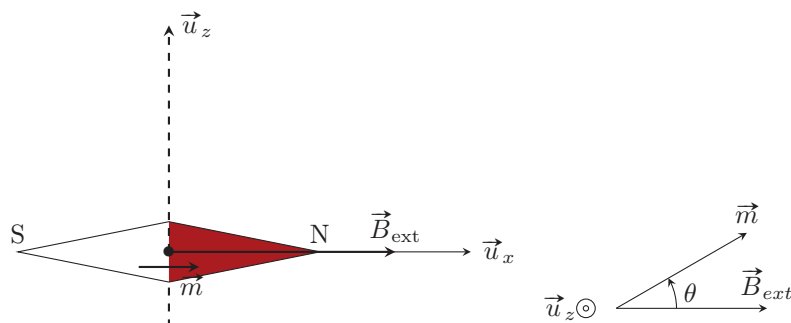
- Ainsi le développement de Taylor de la courbe en $x = 0$ est nécessairement, en notant $B_0 = B_{\text{bobines}}(0)$, et comme les ordres 1 à 3 sont nuls :

$$B_{\text{bobines}}(x=0) = B_0 + \mathcal{O}(x^4)$$

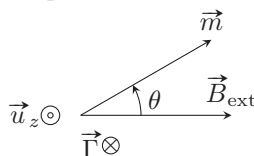
c'est-à-dire que la courbe est constante à l'ordre 3.

A.5

- Le champ des bobines $\vec{B}_{\text{ext}}$ est selon l'horizontale $\vec{u}_x$ et l'axe de rotation de l'aiguille est selon la verticale que l'on note $\vec{u}_z$. Le moment magnétique $\vec{m}$ de l'aiguille est orienté du pôle sud vers le pôle nord de cet aimant.



- Qualitativement, un tel moment magnétique s'oriente dans l'axe du champ extérieur magnétique auquel il est soumis. Vu les contraintes de mouvement de l'aiguille, sa position d'équilibre finale est donc l'aiguille orientée vers le nord, ce qui est tout à fait logique pour une boussole...
- En effet, cette position est une position d'équilibre : le couple du champ $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}_{\text{ext}}$ est nul si $\vec{m}$ et $\vec{B}_{\text{ext}}$ sont alignés.
- De plus cet équilibre est stable car si l'on sort l'aiguille de sa position d'équilibre, le couple tend à ramener le système vers la position d'équilibre :



A.6

- On applique le théorème du moment cinétique (TMC) projeté selon l'axe $\Delta = (0z)$ de rotation de l'aiguille au système composé de l'aiguille de moment d'inertie J , dans le référentiel supposé galiléen du laboratoire.
- On note θ l'angle du moment orienté selon $\vec{u}_z$ par rapport à la position d'équilibre.
- Les actions subies par ce système sont celles de l'axe, le poids, et l'action du champ magnétique.
- Le couple de l'axe est nul (sans frottement, l'aiguille peut tourner librement), le moment du poids est nul, car le poids est aligné avec l'axe.
- Il reste le couple exercé par le champ sur le moment, en supposant que le champ est uniforme sur l'aiguille, ce qui est probablement le cas dans la configuration Helmholtz si l'aiguille est plus petite que les bobines (le champ terrestre, lui est homogène...) : $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}_{\text{ext}} = -mB_{\text{ext}} \sin(\theta) \vec{u}_z$ (cf schéma ci dessus).
- Le moment cinétique de l'aiguille projeté selon $\vec{u}_z$ est par définition de J et de l'angle θ : $\sigma_{\Delta} = J\dot{\theta}$
- Le TMC projeté suivant $\vec{u}_z$ s'écrit $\frac{d\sigma_{\Delta}}{dt} = \vec{\Gamma} \cdot \vec{u}_z$ soit

$$J\ddot{\theta} = -mB_{\text{ext}} \sin \theta$$

- Par hypothèse les oscillations sont petites donc $\theta \ll 1$ donc $\sin \theta \approx \theta$. L'équation devient

$$\ddot{\theta} + \frac{mB_{\text{ext}}}{J}\theta = 0$$

- C'est un oscillateur harmonique, les solutions sont oscillantes de pulsation ω_1 telle que $\omega_1^2 = \frac{mB_{\text{ext}}}{J}$.
- La période $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$ est alors

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mB_{\text{ext}}}}$$

A.7

- L'inversion du sens du courant change uniquement la valeur du champ magnétique extérieur appliqué à la boussole. Les calculs précédents sont identiques. Dans l'expérience 1, le champ vaut $B_{\text{ext}} = B_H + B_0$, dans la deuxième expérience, il vaut $B'_{\text{ext}} = B_H - B_0$, où $B_0 = B_{\text{bobines}}(x=0)$.
- Ainsi, on a le couple d'équations, en supposant $B_H > B_0$:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{m(B_H + B_0)}}$$

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{m(B_H - B_0)}}$$

On en déduit donc :

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{B_H - B_0}{B_H + B_0}} \quad B_H = B_0 \frac{1 + \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2}{1 - \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2}$$

- L'intérêt de cette expérience est d'une part d'avoir une mesure du champ B_H en le comparant à un champ B_0 créé par l'expérimentateur et en ne mesurant que des temps : **le résultat ne dépend pas de J et m** plus difficiles à mesurer. D'autre part, la mesure du temps est assez précise, le contrôle de B_0 aussi dans la configuration dite de Helmholtz $e = R$ (où il est constant, où il y a de la place pour mesurer, et dont on connaît l'expression). De plus, dans cette expérience, l'alignement initial du dispositif avec le nord est assez facile à réaliser en coupant le courant dans les bobines ou en vérifiant que la position d'équilibre est bien dans l'axe des bobines.
- Ce résultat n'est valide que si $B_H > B_0$, ce qui est finalement peu probable expérimentalement, le champ terrestre étant de l'ordre de 5×10^{-5} T en France, alors qu'avec des bobines, on peut

atteindre aisément 10^{-3} T. Dans le cas inverse $\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{B_0 - B_H}{B_H + B_0}}$ donc $B_H = B_0 \frac{1 - \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2}{1 + \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2}$. Pour

connaître le cas dans lequel on est, il suffit d'observer la position d'équilibre stable dans les deux cas. Si elle est la même, cela signifie que $B_H + B_0$ et $-B_H + B_0$ sont de même signe et donc qu'on est dans le premier cas étudié, sinon c'est l'inverse.

- Enfin, on peut noter qu'avec cette méthode, on doit déduire $B_0 = \frac{\mu_0 NI}{R} \left(\frac{4}{5}\right)^{3/2}$ du calcul, et donc de l'évaluation expérimentale de N , I et R (en supposant que la configuration Helmholtz est bien réalisée expérimentalement...), et non le mesurer. En effet sa mesure seule n'est possible qu'en tournant les bobines perpendiculairement au champ terrestre avec une sonde directionnelle (teslamètre à effet Hall par exemple) sinon on mesure $B_{\text{ext}} = B_0 + B_H$ en même temps. Si l'on souhaite mesurer le champ sans toucher à la direction des bobines ni en le déduisant du calcul, on doit plutôt mesurer B_{ext} et non B_H (soustraire B_H à B_{ext} pour en déduire B_0 n'est pas envisageable, il est probable que B_H ne soit pas mesurable tout seul – bobines éteintes – car trop faible par rapport à B_0). On remarque qu'on a $B'_{\text{ext}} = 2B_H - B_{\text{ext}}$ et on trouve alors $B_H = \frac{B_{\text{ext}}}{2} \left(1 + \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2\right)$.

B Limites et explications historiques

B.1

- On lit dans l'annexe que la température du noyau solide excède 6000 °C et celle du noyau externe 4000 °C, températures largement supérieures aux **températures de Curie** des métaux dont est composé le noyau (annexe), c'est-à-dire températures au-delà desquelles les milieux considérés ne sont plus magnétiques (annexe). Donc le noyau de la Terre ne peut pas être magnétique.
- De plus, il existe des **inversions de polarité** du champ magnétique terrestre. Or il est **peu probable** que tout le noyau solide se tourne, telle une aiguille, pour inverser avec lui le sens du champ terrestre. De telles inversions complètes et brutales semblent très hypothétiques pour le noyau dans son ensemble, vu son inertie. Donc le noyau de la Terre ne peut pas être magnétique.
- Enfin, si le noyau externe avait localement une aimantation rémanente, l'aimantation globale ne serait probablement pas constante vu les mouvements de convection qui y existent. On ne s'attend pas à ce qu'un matériau liquide ferromagnétique sujet à de la convection donne un champ orienté toujours dans le même sens, mais c'est contestable : par auto-organisation les milieux ferromagnétiques peuvent avoir une direction d'aimantation constante tout en se déplaçant... Quoiqu'il en soit si on avait à chercher un aimant permanent, il ne pourrait s'agir raisonnablement que du noyau solide qui par les arguments précédents n'est de toute façon probablement pas aimanté.

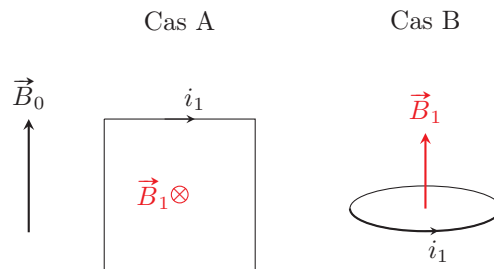
Il est donc finalement hautement improbable que le champ magnétique terrestre ait pour origine un super aimant permanent au centre de la Terre.

B.2 Le modèle de Bohr qui modélise de façon simplifiée (modèle planétaire) le mouvement de l'électron autour du noyau constitué d'un proton dans l'atome d'hydrogène nous permet d'illustrer l'effet Blackett. Le moment cinétique de l'électron s'écrit $\vec{\sigma}_O = m_e r^2 \dot{\theta} \vec{u}_z$ dans un système de coordonnées cylindriques où r est le rayon de la trajectoire circulaire de l'électron et m_e la masse de l'électron. Le moment magnétique engendré par le mouvement de l'électron est $\vec{m} = \frac{e\hbar}{2\pi} \pi r^2 \vec{u}_z$. Le rapport de ces deux grandeurs est appelé le rapport gyromagnétique et vaut dans ce cas $\gamma = -\frac{e}{2m_e}$

B.3 Le modèle de Blackett ne permet pas d'expliquer les inversions de polarité du champ magnétique qu'a connues la Terre (annexe) car la rotation de la Terre est constante (léger ralentissement aux échelles géologiques) donc son moment cinétique est (quasi) constant alors que son moment magnétique ne l'est pas du tout à ces échelles temporelles.

C Effet Dynamo : la dynamo de Bullard

C.1 Qualitativement, les champs créés par les courants i_1 sont d'après la règle de la main droite :

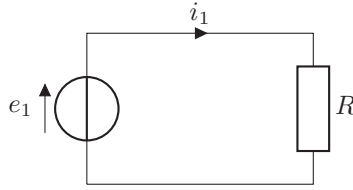


On note que le cas B diffère du cas A par l'ajout de la spire, donc le champ $\vec{B}_1$ possède dans ce cas une composante supplémentaire selon le même axe que $\vec{B}_0$. C'est donc la géométrie B qui est la plus adaptée à un effet dynamo permettant de créer un champ magnétique spontané, où un champ magnétique induit un champ magnétique qui se superpose dans le même sens au champ qui lui a donné naissance, permettant une situation d'instabilité divergente. Et finalement seule une distribution de courant équivalente à une pouvant donner un champ $\vec{B}_0$ peut permettre l'effet dynamo, c'est donc B plutôt que A.

C.2 Dans l'hypothèse où $d \ll a \ll b$ on peut faire l'hypothèse que le champ magnétique créé par la spire est quasiment celui qui est observé au voisinage du centre O d'une spire circulaire (cf partie A) : $\vec{B}_1(P, t) = \frac{\mu_0 i_1(t)}{2b} \vec{u}_z$. On a ainsi $\vec{B}_1(P, t) = B_1(t) \vec{u}_z$.

C.3 Par définition du flux $\phi_{\text{spire} \rightarrow \text{disque}} = \iint \vec{B}_1(P, t) \cdot d\vec{S}_{\text{disque}}$, Sachant que $\vec{B}_1(P, t)$ est quasiment uniforme sur le disque $\phi_{\text{spire} \rightarrow \text{disque}} = B_1(t) \pi a^2 = M i_1$ soit $i_1(t) = \frac{B_1 \pi a^2}{M}$

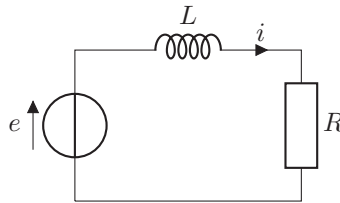
C.4 On représente si-dessous le schéma électrique équivalent :



En appliquant la loi des mailles $e_1 = Ri_1$ soit en remplaçant i_1 par son expression, on obtient $B_1 = \frac{M\Omega B_0}{2\pi R}$

C.5 De la même manière que dans la question **C.3**, on établit que : $\phi_{\text{spire} \rightarrow \text{disque}} = B(t)\pi a^2 = Mi$ soit $B(t) = \frac{Mi(t)}{\pi a^2}$ et remplaçant cette expression dans l'expression de $e(t)$, on obtient $e = \frac{\Omega Mi(t)}{2\pi}$.

C.6 On représente le circuit électrique équivalent :



En appliquant la loi des mailles : $e(t) = Ri(t) + L \frac{di}{dt}$ avec $e(t) = \frac{Mi(t)\Omega}{2\pi}$ soit l'équation différentielle : $\frac{di}{dt} + \left(\frac{R}{L} - \frac{M\Omega}{2\pi L} \right) i(t) = 0$. Par analyse dimensionnelle, on peut définir un temps caractéristique du circuit τ tel que $\frac{1}{\tau} = \frac{R}{L} - \frac{M\Omega}{2\pi L}$. On constate que τ est positif si $R > \frac{M\Omega}{2\pi}$.

Problème n°2 : le haut-parleur électrodynamique

A.1.1 : La haut-parleur est alimenté par une $u(t)$, il émet une onde sonore.... Il y donc conversion d'énergie électrique en énergie mécanique.

A.1.2.1 : En appliquant la loi de Faraday (en convention générateur) :

$$e_{tot}(t) = -\frac{d\phi_B}{dt} \text{ avec } \phi_B = \phi_P + \phi_{ext}$$

où ϕ_P est le flux propre et ϕ_{ext} le flux du champ magnétique extérieur $\vec{B}$ à travers le circuit. Le simple fait que le circuit électrique se déplace dans la zone d'action d'un champ magnétique, ceci génère une f.é.m. induite.

A.1.2.2 : Appliquons la loi des mailles dans le circuit :

$$u(t) = R \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt} - e(t)$$

Avec $\phi_P = L \cdot i(t)$, par identification :

$$e_{tot}(t) = -\frac{d\phi_{ext}}{dt} - L \cdot \frac{di(t)}{dt} = e(t) - L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

On en déduit que $u(t)$ est la tension d'alimentation du haut-parleur, $R \cdot i(t)$ la tension aux bornes de la résistance électrique équivalente au circuit, $L \frac{di(t)}{dt}$ la tension aux bornes de la bobine (en convention récepteur) et $e(t) = -\frac{d\phi_{ext}}{dt}$. Dans la suite, on pose que $e(t) = v(t) \cdot B \cdot l$ soit l'équation électrique :

$$u(t) = R \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt} - v(t) \cdot B \cdot l \quad (E.E)$$

A.1.3 : Chaque élément de longueur $\vec{dl}$ du circuit parcouru par le courant $i(t)$ subit une force élémentaire de Laplace $\vec{dF}_L$ donnée par :

$$\vec{dF}_L = i(t) \cdot \vec{dl} \wedge \vec{B}$$

A partir du schéma proposé :

$$\vec{dF}_L = -i(t) \cdot dl \cdot B \cdot \vec{u}_z$$

A.1.4 : On assimile l'ensemble (bobine + membrane) à un point matériel observé dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On établit l'équation différentielle :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -i(t) \cdot l \cdot B \cdot \vec{u}_z - k \cdot z(t) \cdot \vec{u}_z - \lambda \cdot \vec{v}$$

Dans cette expression, le premier terme est la force de Laplace résultante exercée sur la longueur l de circuit plongé dans la zone d'action du champ $\vec{B}$, le deuxième terme est une force de rappel qui modélise l'action du châssis sur la membrane et le troisième terme est une force de frottement fluide qui modélise l'amortissement du mouvement de la membrane au contact de l'air.

En projetant sur $\vec{u}_z$ on établit l'équation mécanique :

$$m \cdot \ddot{z}(t) + \lambda \cdot \dot{z}(t) + k \cdot z(t) = -i(t) \cdot l \cdot B \quad (E.M)$$

A.2.1 : Que deviennent (E.E) et (E.M) en régime sinusoïdal forcé, en adoptant les notations complexes ?

$$\begin{cases} u(t) = R.i(t) + L \frac{di(t)}{dt} - v(t).B.l & (E.E) \\ m.\ddot{z}(t) + \lambda.\dot{z}(t) + k.z(t) = -i(t).l.B & (E.M) \end{cases}$$

En adoptant les notations complexes, nous savons que chaque dérivée d'une fonction du temps se ramène à une multiplication de cette fonction par $(j.\omega)$ on établit que :

$$\begin{cases} \underline{u}(t) = R.\underline{i}(t) + j.L.\omega.\underline{i}(t) - \underline{v}(t).B.l & (E.E) \\ -m.\omega^2.\underline{z}(t) + j.\lambda.\omega.\underline{z}(t) + k.\underline{z}(t) = -\underline{i}(t).l.B & (E.M) \end{cases}$$

A.2.2 : Déterminons l'impédance du haut-parleur $\underline{Z}(\omega) = \frac{\underline{u}(t)}{\underline{i}(t)}$ A partir de (E.E) on établit que :

$$\underline{Z}(\omega) = \frac{\underline{u}(t)}{\underline{i}(t)} = R + j.L.\omega - B.l.\left(\frac{\underline{v}(t)}{\underline{i}(t)}\right)$$

Exprimons (E.M) en fonction de $\underline{v}(t)$ sachant que : $\underline{v}(t) = j.\omega.\underline{z}(t)$

On établit :

$$j.m.\omega.\underline{v}(t) + \lambda.\underline{v}(t) + \left(\frac{k}{j.\omega}\right).\underline{v}(t) = -\underline{i}(t).l.B$$

Soit :

$$\frac{\underline{v}(t)}{\underline{i}(t)} = \frac{-l.B}{j.m.\omega + \lambda + \left(\frac{k}{j.\omega}\right)}$$

Ainsi :

$$\underline{Z}(\omega) = R + j.L.\omega + \frac{(l.B)^2}{j.m.\omega + \lambda + \left(\frac{k}{j.\omega}\right)}$$

A.2.3 : Soit $\underline{Z}(\omega) = \underline{Z}_e(\omega) + \underline{Z}_m(\omega)$. Par identification :

$$\begin{cases} \underline{Z}_e(\omega) = R + j.L.\omega \\ \underline{Z}_m(\omega) = \frac{(l.B)^2}{j.m.\omega + \lambda + \left(\frac{k}{j.\omega}\right)} \end{cases}$$

A.2.4 : On pose $\underline{Y}_m(\omega) = \frac{1}{\underline{Z}_m(\omega)}$:

$$\underline{Y}_m(\omega) = \frac{j.m.\omega + \lambda + \left(\frac{k}{j.\omega}\right)}{(l.B)^2}$$

$$\underline{Y}_m(\omega) = \frac{j.m.\omega}{(l.B)^2} + \frac{k}{j.(l.B)^2.\omega} + \frac{\lambda}{(l.B)^2}$$

On vérifie que l'admittance motionnelle peut effectivement s'exprimer sous la forme :

$$\underline{Y}_m(\omega) = j.C_m.\omega + \frac{1}{j.L_m.\omega} + \frac{1}{R_m}$$

Par identification, on établit que :

$C_m = \frac{m}{(l.B)^2}$	$L_m = \frac{(l.B)^2}{k}$	$R_m = \frac{(l.B)^2}{\lambda}$
---------------------------	---------------------------	---------------------------------

A.N. : $C_m = 2,5 \cdot 10^{-4} F$; $L_m = 12,8 mH$ et $R_m = 16,0 \Omega$. On vérifie que ces valeurs correspondent bien à celles fournies dans l'énoncé.

A.2.5 : Soit :

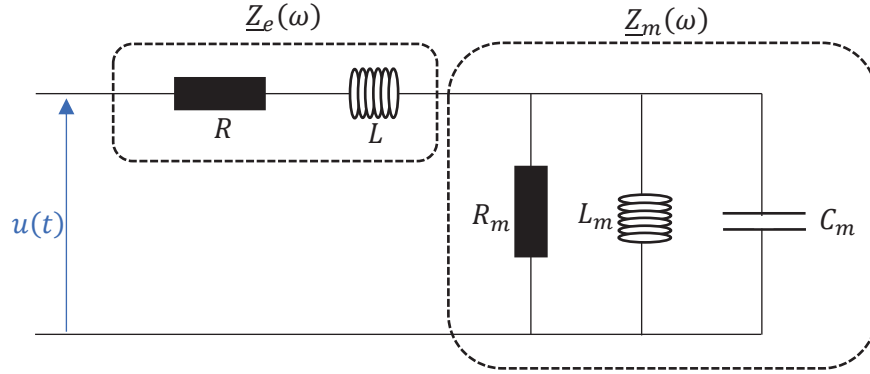
$$\underline{Z}(\omega) = \underline{Z}_e(\omega) + \underline{Z}_m(\omega)$$

Avec :

$\underline{Z}_e(\omega) = R + j \cdot L \cdot \omega$: impédance équivalente d'une association (R, L) série

$\underline{Z}_m(\omega) = \frac{1}{j \cdot C_m \cdot \omega + \frac{1}{j \cdot L_m \cdot \omega} + \frac{1}{R_m}}$: impédance équivalente à une association (R_m, L_m, C_m) en dérivation.

Soit le schéma électrique équivalent du haut-parleur :



A.2.6 : Posons désormais que : $\underline{Z}(\omega) = R_T + j \cdot X_T$ avec :

$$\underline{Z}_m(\omega) = \frac{1}{j \cdot C_m \cdot \omega + \frac{1}{j \cdot L_m \cdot \omega} + \frac{1}{R_m}} = \frac{1}{\frac{1}{R_m} + j \cdot \left(C_m \cdot \omega - \frac{1}{L_m \cdot \omega} \right)}$$

$$\underline{Z}_m(\omega) = \frac{\frac{1}{R_m} - j \cdot \left(C_m \cdot \omega - \frac{1}{L_m \cdot \omega} \right)}{\left(\frac{1}{R_m} \right)^2 + \left(C_m \cdot \omega - \frac{1}{L_m \cdot \omega} \right)^2} = \frac{R_m - j \cdot R_m \cdot \left(C_m \cdot \omega - \frac{1}{L_m \cdot \omega} \right)}{1 + R_m^2 \cdot \left(C_m \cdot \omega - \frac{1}{L_m \cdot \omega} \right)^2}$$

On en déduit que la partie réelle de $\underline{Z}(\omega) = \underline{Z}_e(\omega) + \underline{Z}_m(\omega)$ est bien :

$$R_T = R + \frac{R_m}{1 + R_m^2 \cdot \left(C_m \cdot \omega - \frac{1}{L_m \cdot \omega} \right)^2}$$

A.2.7 : Pour $\omega \rightarrow 0$, $R_T \rightarrow R$. On en déduit que $R = 8,0 \Omega$ (ce qui correspond également à la valeur de R_T pour $\omega \rightarrow \infty$). On constate que $R_T(\omega)$ est maximal pour :

$$\left(C_m \cdot \omega_0 - \frac{1}{L_m \cdot \omega_0} \right)^2 = 0$$

Soit pour :

$$\omega_0 = 2 \cdot \pi \cdot f_0 = \frac{1}{\sqrt{L_m \cdot C_m}}$$

A.N. : $\omega_0 = 5,6 \cdot 10^2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $f_0 = 89 \text{ Hz}$: ceci est bien conforme avec la figure 4 et les données.

A.3.1 : Rappelons les équations électrique et mécanique :

$$\begin{cases} u(t) = R.i(t) + L \frac{di(t)}{dt} - v(t).B.l & (E.E) \\ m.\ddot{z}(t) + \lambda.\dot{z}(t) + k.z(t) = -i(t).l.B & (E.M) \end{cases}$$

En multipliant (E.E) par $i(t)$ on établit :

$$u(t).i(t) = R.i^2(t) + L.i(t) \left(\frac{di(t)}{dt} \right) - v(t).B.l.i(t)$$

$$u(t).i(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L.i^2(t) \right) + R.i^2(t) - v(t).B.l.i(t)$$

On vérifie que

$$u(t).i(t) = \frac{d}{dt} (E_{magn}) + P_J(i(t)) + P_L(v(t))$$

Avec :

$$\begin{cases} E_{magn} = \frac{1}{2} L.i^2(t) : \text{énergie emmagasinée dans la bobine à l'instant } t \\ P_J(i(t)) = R.i^2(t) : \text{puissance dissipée par effet Joule dans le circuit} \\ P_L(v(t)) = -v(t).B.l.i(t) : \text{puissance de la force de Laplace} \end{cases}$$

A.3.2 : De la même manière, en multipliant (E.M) par $v(t)$ on établit :

$$m.v(t). \left(\frac{dv(t)}{dt} \right) + \lambda.v^2(t) + k.z(t). \left(\frac{dz(t)}{dt} \right) = -i(t).l.B.v(t)$$

Soit :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m.v^2(t) \right) + \lambda.v^2(t) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} k.z^2(t) \right) = -i(t).l.B.v(t)$$

On vérifie que :

$$\frac{d}{dt} (E_C(v(t))) + P_A(v(t)) + \frac{d}{dt} (E_{Pe}(z(t))) = P_L(v(t))$$

Avec :

$$\begin{cases} E_C(v(t)) = \frac{1}{2} m.v^2(t) : \text{énergie cinétique "du haut – parleur"} \\ P_A(v(t)) = \lambda.v^2(t) : \text{puissance de la force de frottement fluide} \\ E_{Pe}(z(t)) = \frac{1}{2} k.z^2(t) : \text{énergie potentielle élastique} \end{cases}$$

et $P_L(v(t)) = -i(t).l.B.v(t)$.

A.3.3 : En explicitant $P_L(v(t))$ on établit que :

$$u(t).i(t) = \frac{d}{dt} (E_{magn}) + P_J(i(t)) + \frac{d}{dt} (E_M(t)) + P_A(v(t))$$

En posant $E_M(t) = E_C(v(t)) + E_{Pe}(z(t))$: énergie mécanique du haut-parleur.

A.3.4 : Valeur moyenne de la relation précédente :

$$\langle u(t).i(t) \rangle = \frac{d}{dt}(\langle E_{magn} \rangle) + \langle P_J(i(t)) \rangle + \frac{d}{dt}(\langle E_M(t) \rangle) + \langle P_A(v(t)) \rangle$$

En régime sinusoïdal forcé (ou permanent) les valeurs moyennes de E_{magn} et de $E_M(t)$ sont constantes donc :

$$\frac{d}{dt}(\langle E_{magn} \rangle) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt}(\langle E_M(t) \rangle)$$

En posant $\langle P_S(t) \rangle = \langle u(t).i(t) \rangle$ on vérifie que :

$$\langle P_S(t) \rangle = \langle P_J(i(t)) \rangle + \langle P_A(v(t)) \rangle$$

$$\langle P_S(t) \rangle = R. \langle i^2(t) \rangle + \lambda. \langle v^2(t) \rangle$$

La vocation d'un haut-parleur est d'émettre une onde sonore donc la puissance utile est :

$$\langle P_u(t) \rangle = \lambda. \langle v^2(t) \rangle$$

Le rendement est défini par le rapport :

$$\eta = \frac{\langle P_u(t) \rangle}{\langle P_S(t) \rangle}$$

En explicitant :

$$\eta = \frac{\lambda. \langle v^2(t) \rangle}{R. \langle i^2(t) \rangle + \lambda. \langle v^2(t) \rangle}$$

A.3.5 : Posons :

$$\eta = \frac{\langle P_u(t) \rangle}{\langle P_S(t) \rangle} = \frac{\langle P_S(t) \rangle - R. \langle i^2(t) \rangle}{\langle P_S(t) \rangle} = 1 - \frac{R. \langle i^2(t) \rangle}{\langle P_S(t) \rangle}$$

Compte tenu du fait que la puissance moyenne consommée par une bobine est nulle, on peut dire que la puissance moyenne consommée par le circuit est :

$$\langle P_S(t) \rangle = R_T. \langle i^2(t) \rangle$$

On établit alors que :

$$\eta = 1 - \frac{R. \langle i^2(t) \rangle}{\langle P_S(t) \rangle} = 1 - \frac{R}{R_T} = \frac{R_T - R}{R_T}$$

A.3.6 : Avec $\eta = 1 - \frac{R}{R_T}$ le rendement est maximal quand $R_T(\omega)$ est maximal avec :

$$R_T(\omega) = R + \frac{R_m}{1 + R_m^2 \cdot \left(C_m \cdot \omega - \frac{1}{L_m \cdot \omega} \right)^2}$$

On constate que $R_T(\omega)$ est maximal quand le terme au dénominateur est minimal c.à.d. pour :

$$\omega_0 = 2. \pi. f_0 = \frac{1}{\sqrt{L_m \cdot C_m}} = 5,6. 10^2 \text{ rad. s}^{-1}$$

Soit $f_0 = 89 \text{ Hz}$ ce qui est en accord avec les données.

A.3.7 : L'utilisation du haut-parleur est intéressante au voisinage de $f_0 = 89 \text{ Hz}$. Si on s'accorde une bande-passante de $-3,0 \text{ dB}$ alors $\eta(\omega_c) = \frac{\eta_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{0,67}{\sqrt{2}} = 0,47$. On détermine graphiquement $\omega_{c1} = 520 \text{ rad.s}^{-1}$ et $\omega_{c2} = 600 \text{ rad.s}^{-1}$ auxquelles on associe les fréquences $f_{c1} = 83 \text{ Hz}$ et $f_{c2} = 95 \text{ Hz}$. On peut noter que la bande-passante du haut-parleur est très étroite (filtre sélectif), l'intervalle des ondes sonores perceptibles par l'homme étant compris entre 20 Hz et 20 kHz (en théorie).

A.3.8 : Compte tenu des résultats précédents, on comprend qu'il est nécessaire d'utiliser plusieurs haut-parleurs dans les enceintes acoustiques.

→