

Devoir Maison n° 1

Analyse dimensionnelle

Problème 1 Instabilité de flambage d'une lame

Nous nous proposons de définir les conditions d'apparition du fléchissement d'une lame élastique souple, érigée en position verticale, sous l'action de son propre poids. Ce phénomène est une instabilité dite de flambage.

A Caractérisation du comportement élastique du matériau

Nous considérons un barreau homogène de longueur a lorsqu'il n'est soumis à aucune force, et de section droite S . Sous l'action de deux forces $(-\vec{F}, +\vec{F})$ appliquées à ses extrémités, selon son axe (Δ) de vecteur unitaire $\vec{e}_\Delta$, sa longueur s'accroît (algébriquement) de u , comme le représente la figure (1).

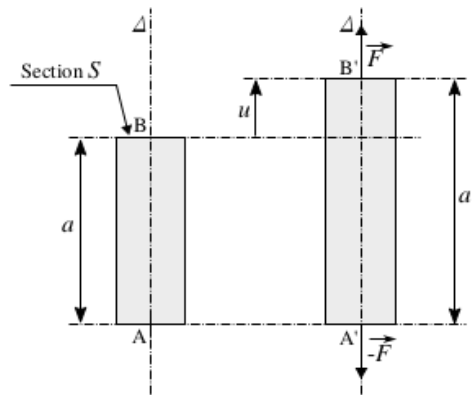


Figure 1 - Allongement (algébrique) u d'un barreau (a, S) soumis à deux efforts axiaux $(-\vec{F}, +\vec{F})$.
Les points A et A' ont été ramenés dans le même plan perpendiculaire à l'axe (Δ) .

Dans l'approximation linéaire lorsque $|u| \ll a$, l'élongation u et la composante F de la force $\vec{F} = F\vec{e}_\Delta$ sont liées par la relation suivante appelée la loi de Hooke :

$$\frac{F}{S} = Y \frac{u}{a}$$

La constante réelle positive Y représente le module de Young du matériau constituant le barreau.

A.1 Déterminer la dimension du module d'Young ainsi que son unité SI.

A.2 Dans quelle unité usuelle peut-on exprimer Y ?

B Étude du flambage

La lame, de masse volumique uniforme ρ , se présente sous la forme d'un parallélépipède occupant le volume $[-b/2, +b/2] \times [-e/2, +e/2] \times [0, L]$, relativement au repère $\mathcal{R}(O, x, y, z)$, comme le représente la figure (2) (a) (lame non déformée). Elle n'est soumise qu'au champ de pesanteur $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ et à l'action de son support qui maintient sa base rigidement encastree ($z \leq 0$). La figure (2) (b) représente l'allure de la lame déformée sous l'effet de la pesanteur ou d'éventuelles oscillations.

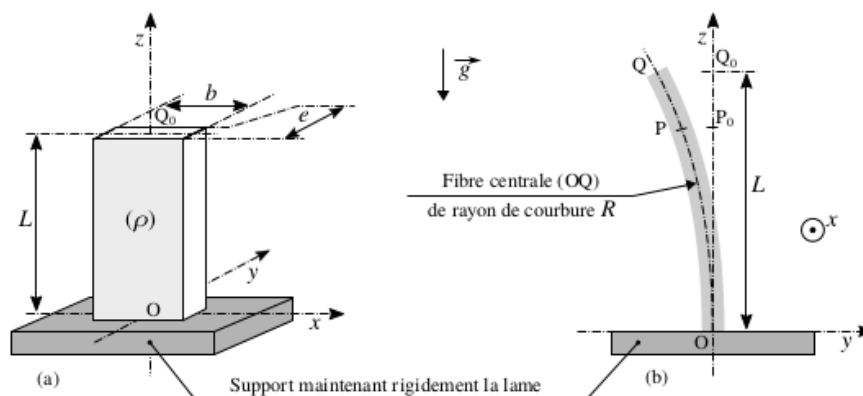


Figure 2 - (a) Géométrie de la lame mince non fléchie (c'est-à-dire dans sa situation de référence).
(b) La lame est déformée selon un arc de cercle de rayon R .

Ces deux figures ne sont pas représentées à la même échelle ni selon les mêmes proportions.

On note L_c la longueur critique de la lame, au-delà de laquelle sa configuration de référence devient instable. On peut montrer que $\frac{L_c}{e}$ est fonction de Y , ρ , g et e tel que $\frac{L_c}{e} = kY^\alpha \rho^\beta g^\gamma e^\delta$ avec k une constante adimensionnée et α , β , γ et δ des coefficients à déterminer. Une étude énergétique permet de déterminer complètement cette relation mais nous allons tenter de le faire par analyse dimensionnelle.

B.1 Déterminer le système d'équations issues d'une analyse dimensionnelle. Peut-on résoudre ce système ?

B.2 Sachant que $\alpha = \frac{1}{3}$, déterminer β , γ et δ .

La figure (3) représente une expérience réalisée avec une bande de papier découpée dans une feuille A4, selon sa longueur. La longueur de la bande située au dessus de son point de maintien excède très légèrement la longueur critique L_c .

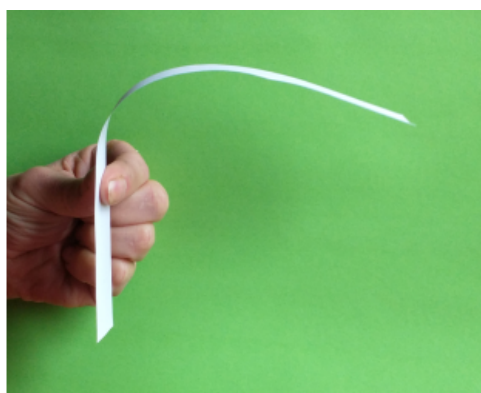


Figure 3 - Expérience réalisée avec une bande de papier.

B.3 Déterminer l'ordre de grandeur de la valeur du module de Young Y de la feuille sachant que $\frac{L_c}{e} = \left(\frac{2Y}{\rho g e}\right)^{1/3}$.

On donne $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$ et les caractéristiques de la feuille A4 : dimensions : $21,0 \text{ cm} \times 29,7 \text{ cm}$, épaisseur : $e \simeq 0,01 \text{ cm}$ et masse surfacique : $\sigma = 80 \text{ g m}^{-2}$.