

Problème 1 Instabilité de flambage d'une lame

A Caractérisation du comportement élastique du matériau

A.1 D'après l'expression donnée, $[Y] = \frac{[a][F]}{[S][u]}$ avec $[a] = L$, $[F] = MLT^{-2}$, $[S] = L^2$ et $[u] = L$. Ainsi, on obtient :

$$[Y] = \frac{L \times MLT^{-2}}{L^2 \times L}$$

$$\boxed{[Y] = ML^{-1}T^{-2}}$$

Y s'exprime en $\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$

A.2 $ML^{-1}T^{-2}$ correspond à une force surfacique : on peut exprimer Y en Pascal (Pa).

B Étude du flambage

B.1 On a $\frac{L_c}{e} = kY^\alpha \rho^\beta g^\gamma e^\delta$ avec $\left[\frac{L_c}{e}\right] = 1$, $[\rho] = ML^{-3}$, $[g] = LT^{-2}$ et $[e] = L$. On cherche α , β , γ et δ de manière à vérifier : $M^\alpha L^{-\alpha} T^{-2\alpha} M^\beta L^{-3\beta} L^\gamma T^{-2\gamma} L^\delta = 1$.

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ -\alpha - 3\beta + \gamma + \delta = 0 \\ -2\alpha - 2\gamma = 0 \end{cases}$$

On a 4 inconnues et seulement 3 équations, ce système ne peut être résolu sans indication supplémentaire.

B.2 On résout en considérant $\alpha = \frac{1}{3}$:

$$\begin{cases} \beta = -\alpha = -\frac{1}{3} \\ \delta = \alpha + 3\beta - \gamma = \frac{1}{3} - \frac{3}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3} \\ \gamma = -\alpha = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Ainsi $\boxed{\frac{L_c}{e} = k \left(\frac{Y}{\rho g e} \right)^{1/3}}$

B.3 Grâce aux données, on peut exprimer la masse du papier : $m = \sigma S = \rho V = \rho S e$. D'où sa masse volumique : $\rho = \frac{\sigma S}{S e} = \frac{\sigma}{e}$. A.N. : $\rho = 8,0 \times 10^2 \text{ kg m}^{-3}$.

D'après la photo, on estime que L_c correspond à environ $2/3$ de la longueur de la feuille donc $L_c \simeq 20 \text{ cm}$.

Ainsi, on utilise :

$$\boxed{Y = \frac{L_c^3 \rho g}{2e^2}}$$

A.N. : $Y = \frac{(20 \times 10^{-2})^3 \times 8,0 \times 10^2 \times 9,8}{2 \times (1 \times 10^{-4})^2} = \underline{3,1 \times 10^9 \text{ Pa} = 3,1 \text{ GPa}}$.

L'ordre de grandeur du module d'Young de la feuille de papier est donc 10^9 Pa