

Problème n°1 : Vers une nouvelle définition du kilogramme...

1) Déterminons l'homogénéité de la constante de gravitation, pour cela, posons :

$$[G] = \left[\frac{Fr^2}{m^2} \right]$$

Avec :

$$[r^2] = L^2 ; \quad [m^2] = M^2 \quad \text{et} \quad [F] = [ma] = MLT^{-2}$$

En explicitant :

$$[G] = M^{-1}L^3T^{-2}$$

2) De la même manière posons :

$$[h] = \left[\frac{E}{\nu} \right]$$

Avec l'homogénéité de l'énergie donnée par une grandeur énergétique (exemple l'énergie cinétique) :

$$[E] = ML^2T^{-2} \quad \text{et} \quad [\nu] = T^{-1}$$

$$[h] = ML^2T^{-1}$$

3) En notant que la célérité de la lumière est homogène à une vitesse (LT^{-1}) explicitons la relation aux dimensions :

$$M = (M^{-1}L^3T^{-2})^\alpha (LT^{-1})^\beta (ML^2T^{-1})^\gamma$$

$$M = M^{-\alpha+\gamma} L^{3\alpha+\beta+2\gamma} T^{-2\alpha-\beta-\gamma}$$

Ceci nous conduit au système d'équations :

$$\begin{cases} -\alpha + \gamma = 1 & (1) \\ 3\alpha + \beta + 2\gamma = 0 & (2) \\ 2\alpha + \beta + \gamma = 0 & (3) \end{cases}$$

En posant (2) – (1) :

$$\alpha + \gamma = 0$$

On en déduit que :

$$\alpha = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \beta = \gamma = \frac{1}{2}$$

Soit l'expression de la masse de Planck :

$$m_P = \sqrt{\frac{hc}{G}}$$

4) Application numérique : $m_P = 5,46 \cdot 10^{-8} \text{ kg}$

5) Le kilogramme peut ainsi être défini comme étant égal à $18,3 \cdot 10^6$ masses de Planck... cette définition présente l'avantage d'être indépendante de la variabilité du prototype de référence.

Problème n°2 : Modélisation d'un halo solaire

1) Par définition, l'indice n d'un milieu transparent est donnée par :

$$n = \frac{c}{v}$$

2) Lois de Snell-Descartes :

- Le rayon réfléchi est symétrique au rayon incident par rapport à la normale (avec des angles orientés) : $\theta'_1 = -\theta_1$
- Le rayon réfracté est lié au rayon incident par la loi des sinus : $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$

Rq. : pas demandé ici mais important de rappeler que le rayon réfléchi et le rayon réfracté sont dans le plan d'incidence (défini par le rayon incident et la normale au dioptre)

3) Avec $n_2 < n_1$ on peut dire que $\theta_2 > \theta_1$. Il existe donc un angle limite (noté θ_l) défini dans le milieu d'indice n_1 pour lequel l'angle de réfraction dans le milieu d'indice n_2 est $\theta_2 = 90^\circ$. Si l'angle d'incidence est supérieur à l'angle limite, il y a réflexion totale (dans le milieu le plus réfringent).

4) En explicitant dans la loi des sinus : $n_1 \sin \theta_l = n_2 \sin(90^\circ) = n_2$ soit :

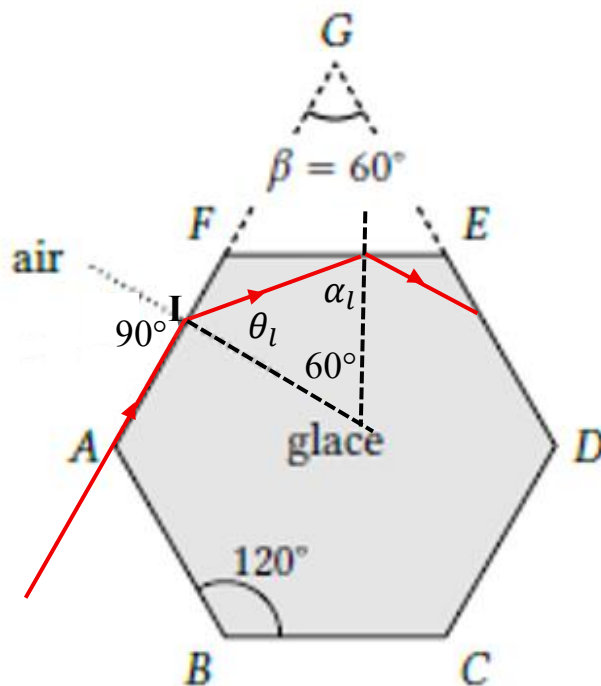
$$\sin \theta_l = \frac{n_2}{n_1}$$

5) Pour le dioptre glace-air (avec $n_g > n_a$) :

$$\sin \theta_l = \frac{n_a}{n_g}$$

A.N. : $\theta_l = 49,8^\circ$

6) Quand le rayon lumineux pénètre dans la glace il se rapproche de la normale. Le rayon le plus susceptible d'émerger par la face (EF) est celui qui est le plus dévié (donc pour un rayon incident d'angle $i = 90^\circ$ et pour lequel le rayon réfracté fait un angle $\theta_l = 49,8^\circ$ par rapport à la normale) :



Par construction : $\alpha_l + \theta_l + 60 = 180$ donc $\alpha_l = 70,2^\circ$. On constate que $\alpha_l > \theta_l$ il y a donc réflexion totale sur la face (EF). Ceci confirme le fait qu'aucun rayon n'émerge par la face (EF).

7) La face (CD) est parallèle à la face (AF) donc par construction on peut dire que : $r' = r$ et $i' = i$. Les déviations sur les deux dioptries se compensent. Le rayon qui émerge par la face (CD) est donc parallèle au rayon incident.

8) En appliquant la loi des sinus en I et I' : $\sin i = n_g \sin r$ et $\sin i' = n_g \sin r'$

9) Relation entre les angles dans le triangle GII' : $\beta + \left(\frac{\pi}{2} - r\right) + \left(\frac{\pi}{2} + r'\right) = \pi$. On vérifie que :

$$\beta = r - r'$$

Exprimons désormais la déviation par le prisme :

$$\delta = -(i - r) + (i' - r')$$

On établit que :

$$\delta = i' - i + r - r'$$

10) Compte tenu des lois des sinus données en 8), pour $i = -i'$ on peut dire que $r = -r'$ donc $\beta = 2r$. A partir de la loi des sinus appliquée en I on établit que :

$$\sin i = n_g \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

11) Au minimum de déviation, $\delta_{min} = -2i + 2r = -2i + \beta$ avec $\beta = 2r$. A.N. : $\delta_{min} = -21,8^\circ$ donc $|\delta_{min}| = 21,8^\circ$ valeur proche de celle observée.

12) Au voisinage du minimum de déviation, la présence d'une tangente horizontale se traduit par une faible variation de la déviation sur « un large » domaine de l'angle d'incidence i . Ceci se traduit par une concentration de la lumière au voisinage de δ_{min} . Compte tenu du fait que les cristaux de glace ont un mouvement erratique, par symétrie de révolution on observe un halo lumineux d'angle au sommet $|\delta_{min}|$.

13) Les cristaux de glace sont assimilés à des prismes dispersifs $n_g(\lambda)$. Il est dit dans l'énoncé que l'indice optique de la glace est une fonction décroissance de la longueur d'onde (cf formule semi-empirique de Cauchy) donc $n_g(\lambda)$ diminue quand λ augmente. Appliquons la loi des sinus en I :

$$\sin i = n_g(\lambda) \sin r(\lambda)$$

Si $n_g(\lambda)$ diminue quand λ augmente alors $r(\lambda)$ augmente. On en déduit que les grandes longueurs d'onde sont moins déviées que les courtes ce qui est en accord avec les observations.

Problème n°3 : Relation de conjugaison, grandissement et construction

1) On dit qu'un système optique est (rigoureusement) stigmatique pour un couple de points (A, A') si tous les rayons qui passent par A passent par A' après traversée d'un système optique. Un système optique satisfait la condition d'aplanétisme si l'image d'un objet orthogonal à l'axe optique est également orthogonale à l'axe optique.

Un système optique est dans les conditions de Gauss si les rayons incidents sont peu inclinés et peu écartés par rapport à l'axe optique. Dans un montage expérimental, on utilise des diaphragmes pour se placer dans les conditions de Gauss. Dans ces conditions, les principaux systèmes optiques que nous utilisons (lentilles minces, miroirs concaves, miroirs sphériques...) sont stigmatiques (au sens approché du terme).

2) A partir des formules données dans l'énoncé, on peut poser que $\overline{OA'} = \gamma \overline{OA}$. En explicitant dans la relation de conjugaison de Descartes :

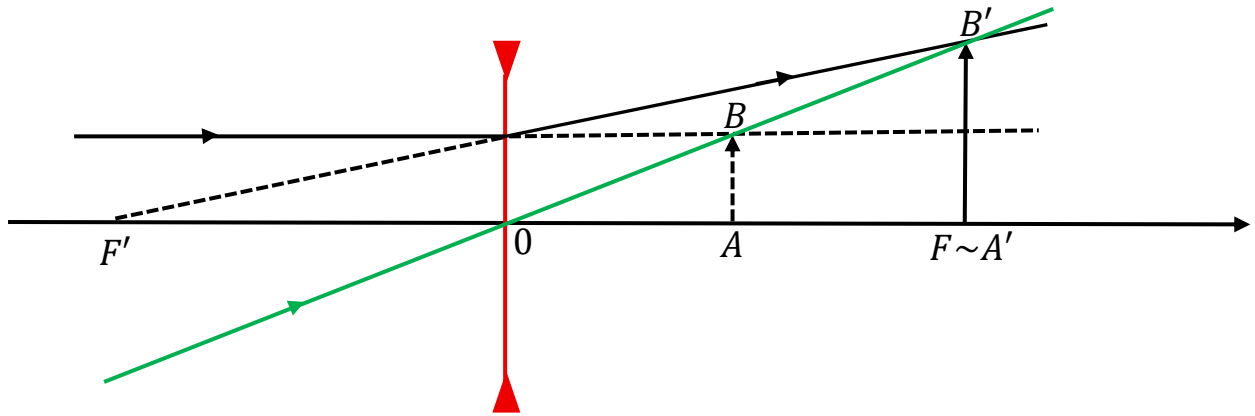
$$\frac{1}{\gamma \overline{OA}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

On établit que :

$$\overline{OA} = f' \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right)$$

A.N. : $\overline{OA} = 0,010 \text{ m}$: l'objet est à droite de la lentille L , il est virtuel.

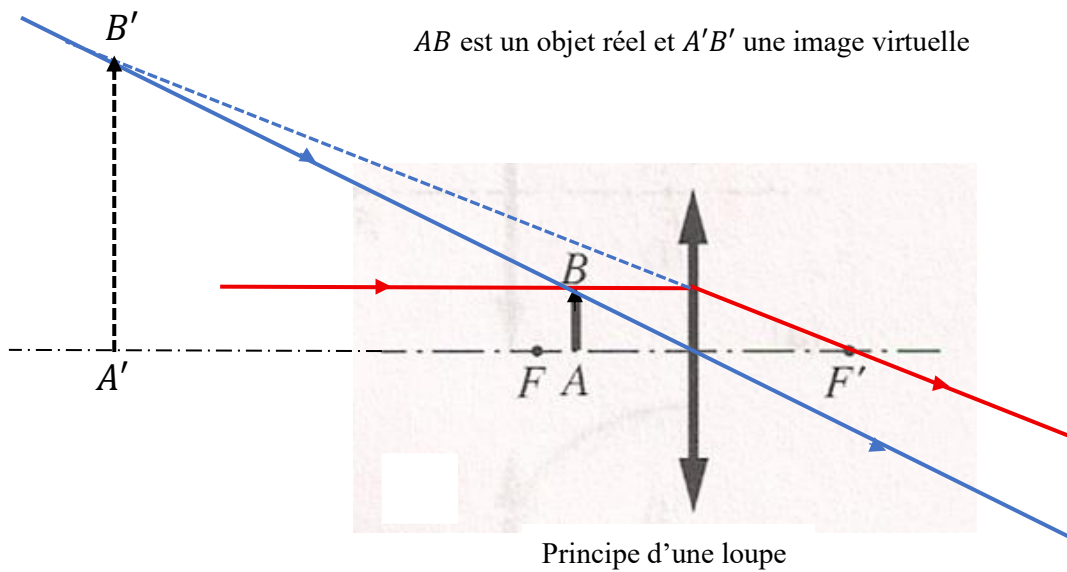
3) Schéma :



L'objet AB est virtuel, l'image A'B' est réelle. On vérifie que l'image est droite et que le grandissement est $\gamma = 2,0$

Problème n°4 : Tracés de rayons...

1)



2)

