CLASSES DE PCSI 1 et 3 – Corrigé du D.L N° 4 de PHYSIQUE

Problème n°1 : Des oiseaux haut en couleur

I. Le bleu de la perruche

Q.1- Pour un œil emmétrope, l'œil au repos est adapté pour une vision à l'infini. Il faut donc que l'image A_2 soit à l'infini. Si l'image de l'oculaire est à l'infini alors son objet A_1B_1 est dans le plan focal objet de la lentille. En effet, appliquons la relation de conjugaison de Descartes à L_2 :

$$\frac{1}{\overline{O_2A_2}} - \frac{1}{\overline{O_2A_1}} = \frac{1}{\overline{O_2F_2'}}$$

Avec $\overline{O_2A_2} \to \infty$:

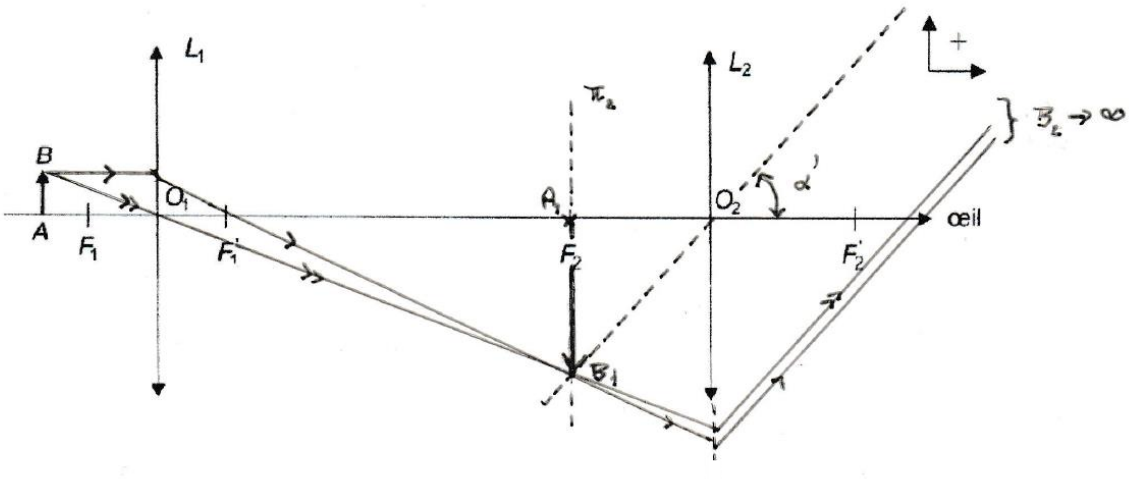
$$-\frac{1}{\overline{O_2A_1}} = \frac{1}{\overline{O_2F_2'}}$$

On vérifie que :

$$\overline{O_2A_1} = -\overline{O_2F_2'}$$

$$\boxed{A_1 \sim F_2}$$

Q.2- Schéma du microscope utilisé par un œil emmétrope au repos :



Q.3- A partir du rayon passant par F_1' explicitons le grandissement transversal de l'objectif :

$$\boxed{\gamma_1 = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{F_1'A_1}}{\overline{0_1F_1'}} = -\frac{\Delta}{f_1'}}$$

Q.4- A partir du schéma ci-dessus, on établit que :

$$\tan\alpha' = -\frac{\overline{A_1B_1}}{f_2'}$$

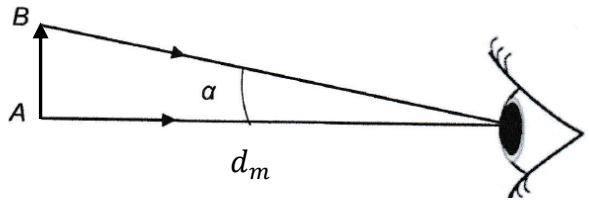
En explicitant $\overline{A_1B_1}$, en posant $\overline{AB} = h$ et dans l'hypothèse des petits angles :

$$\boxed{\alpha' = -\frac{\overline{A_1B_1}}{f_2'} = \frac{\Delta h}{f_1'f_2'}}$$

Q.5- La distance minimale de vision distincte est appelée le Punctum Proximum (PP) et la distance maximale de vision distincte, le Punctum Remotum (PR). Pour un œil emmétrope, le (PP) est de quelques centimètres, mais il est d'usage de poser que $d_m = 25$ cm pour le calcul des « grandeurs commerciales » et le (PR) est à l'infini :

$$d_m = 25 \text{ cm} \quad \text{et} \quad d_M \to \infty$$

Q.6- A partir du schéma ci-dessous, en posant $\overline{AB} = h$:



$$\tan\alpha = \frac{h}{d_m}$$

Q.7- En explicitant α et α' on vérifie que :

$$G_C = \frac{d_m \Delta}{f_1' f_2'}$$

A.N. : $G_C = 1{,}7.10^2$

Q.8- A la limite de résolution de l'œil :

$$G_C = \frac{\varepsilon}{\alpha_m}$$

Soit :

$$\alpha_m = \frac{\varepsilon}{G_C} = \frac{\varepsilon f_1' f_2'}{d_m \Delta}$$

A.N. : $\alpha_m = 6{,}0.10^{-3\,\prime} = 1{,}7.10^{-6}$ rad.

Q.9- Sur le schéma, on peut déterminer la distance entre deux crochets. Valeur moyenne mesurée sur 4 crochets : $d_C = 25$ µm

Q.10- Angle sous lequel l'observateur verrait les crochets à l'œil nu : $\alpha = \frac{d_C}{d_m} = 1{,}0.10^{-4}$ rad $< \varepsilon$ avec $\varepsilon = 1' = 3.10^{-4}$ rad. On en déduit que l'observateur ne pourrait par voir les crochets à l'œil nu. Avec le microscope $\alpha' = G_C \alpha = 1{,}7.10^{-2}$ rad $> \varepsilon$, l'observateur peut observer les crochets avec le microscope.

Q.11- On note $\langle \mathcal{P}_b \rangle$ et $\langle \mathcal{P}_r \rangle$ les puissances moyennes diffusées dans le bleu et dans le rouge. Exprimons le rapport de ces puissances :

$$\frac{\langle \mathcal{P}_b \rangle}{\langle \mathcal{P}_r \rangle} = \frac{\omega_b^4}{\omega_r^4}$$

Sachant que :

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi c}{\lambda}$$

$$\frac{\langle \mathcal{P}_b \rangle}{\langle \mathcal{P}_r \rangle} = \left(\frac{\lambda_r}{\lambda_b}\right)^4$$

A partir des valeurs numériques proposées pour la longueur d'onde, si on pose $\lambda_b = 475$ nm et $\lambda_r = 700$ nm :

$$\langle \mathcal{P}_b \rangle = 5 \langle \mathcal{P}_b \rangle$$

On constate que le plumage d'une perruche diffuse 5 fois plus le bleu que le rouge… les radiations non diffusées sont transmises par les micro-granules.

II. Du vert au violet pour le canard colvert

Q.12- Chaque micro-lamelle se comporte comme un petit miroir réfléchissant la lumière… La structure en micro-lamelles constitue donc un réseau par réflexion.

Q.13- A partir de la figure 6-a on établit que :

$$\delta_i = HO_{n+1} = a \sin\theta_0$$

De la même manière, on établit que :

$$\delta_t = O_n P = a \sin\theta$$

On en déduit que la différence de marche (qui est une grandeur algébrique) entre les deux rayons au point M est donnée par :

$$\delta(M) = (SO_{n+1}M) - (SO_nM) = O_nP - HO_{n+1}$$

En explicitant, on vérifie que :

$$\boxed{\delta(M) = a.(\sin\theta - \sin\theta_0)}$$

Q.14- Avec $\varphi(M)$ déphasage entre les deux rayons au point M :

$$\boxed{\varphi(M) = \frac{2\pi\delta(M)}{\lambda_0}}$$

Q.15- En M les interférences sont constructives pour $\cos\varphi(M) = 1$ soit pour :

$$\varphi(M) = 2k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

En explicitant :

$$\frac{2\pi\delta(M)}{\lambda_0} = 2k\pi$$

Les interférences sont constructives pour : $\boxed{\delta(M) = k\lambda_0}$

Q.16- De la même manière, en représentant les plans d'ondes passant par O_n et O_{n+1} on établit que la différence de marche (algébrique) est donnée par :

$$\delta(M) = a.(\sin\theta + \sin\theta_0)$$

en notant que $\theta < 0$.

Les interférences sont constructives pour $\delta(M) = k\lambda_0$. On vérifie que :

$$\boxed{\sin\theta_k + \sin\theta_0 = \frac{k\lambda_0}{a}}$$

avec $k \in \mathbb{Z}$

Q.17- A partir de la figure 5, en effectuant la mesure sur plusieurs lamelles, on mesure $a = 0{,}58\,\mu m$ entre deux micro-lamelles, ce qui est en accord avec la valeur proposée.

Q.18- Les micro-lamelles sont éclairées en incidence normale $\theta_0 = 0$. La relation établie à la question 16) devient :

$$\sin\theta_k = \frac{k\lambda_0}{a}$$

- Pour l'observateur A : $\theta = 90\,°$ et $\sin\theta_k = 1$ donc $k\lambda_0 = a$. Pour $k = 1$: $\lambda_0 = 0{,}58$ µm, ceci est en accord avec la coloration verte du plumage du colvert sous incidence normale (cf photo 4). Pour des valeurs plus élevées de k la longueur d'onde est plus courte et nous éloigne du spectre du visible.
- Pour l'observateur B : $\theta = 45\,°$ et $\sin\theta_k = 0{,}71$ donc $k\lambda_0 = 0{,}71a$. Pour $k = 1$: $\lambda_0 = 0{,}41$ µm. Ceci est ceci est en accord avec la coloration violette du plumage du colvert pour $\theta = 45\,°$ (cf photo 4).

III. Le colibri aux mille couleurs

Q.19- Sur la photo 7, en effectuant la mesure sur plusieurs micro-lamelles, on mesure une distance d'environ 3 mm. Avec un grandissement de 6000 on peut considérer que :

$$e = 0{,}5\ \mu\text{m}$$

Q.20- La couleur du colibri résulte d'interférences constructives. Posons $\delta(M) = k.\lambda = 2.e.\cos i$

Pour $k = 1$: $\lambda_r = 2.e.\cos i_r$ et $\lambda_b = 2.e.\cos i_b$

A.N. : avec $\lambda_r = 700$ nm : $i_r = 46\,°$
avec $\lambda_b = 480$ nm : $i_b = 61\,°$

Le colibri doit tourner la tête d'un angle $\Delta i = i_b - i_r = 15\,°$

Problème n°2 : Cavités résonnantes

I. Cavité résonante électromagnétique

Q.1- A partir de l'équation différentielle (1), on peut dire que $[\varepsilon_0\mu_0] = \mathrm{T}^2\mathrm{L}^{-2}$. On vérifie que :

$$[c] = \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\right] = \mathrm{L.\,T^{-1}}$$

A.N. : $c = 3{,}00.10^8$ m.s^{-1} : la vitesse de l'onde électromagnétique s'identifie à la célérité de la lumière dans le vide.

Q.2- Avec $\vec{E}(x,t) = E_0\cos(\omega t - kx)\,\vec{u}_y$ on peut dire que l'onde électromagnétique est sinusoïdale progressive. Compte tenu du fait que le champ électrique est dirigé sur $\vec{u}_y$ (c.à.d. dans une direction orthogonale à la direction de propagation de l'onde), l'onde électromagnétique est transversale.

Q.3- Explicitons le champ $\vec{E}(x,t)$ donné par la formule (2) dans la relation (1) :

$$\frac{d^2\vec{E}(x,t)}{dx^2} = -k^2\vec{E}(x,t)$$

$$\frac{d^2\vec{E}(x,t)}{dt^2} = -\omega^2\vec{E}(x,t)$$

En explicitant :

$$-k^2\vec{E}(x,t) - \varepsilon_0\mu_0\left(-\omega^2\vec{E}(x,t)\right) = \vec{0}$$

$$k^2\vec{E}(x,t) = \varepsilon_0\mu_0\omega^2\vec{E}(x,t)$$

Avec $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ on établit que $k^2 = \omega^2/c^2$. Ainsi :

$$k = \pm\frac{\omega}{c}$$

Pour une onde progressive, on vérifie que :

$$\boxed{k = \frac{\omega}{c}}$$

Q.4- Compte tenu du fait que le champ électrique est nul dans un conducteur parfait, par continuité :

$$\boxed{\vec{E}(0,t) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{E}(L,t) = \vec{0}}$$

En explicitant :

$$\vec{E}(0,t) = E_0\cos(\omega t)\,\vec{u}_y = \vec{0}$$

Pour que cette relation soit vérifiée quel que soit t il faut que $E_0 = 0$.

Q.5-On considère un champ électrique $\vec{E}(x,t) = 2E_0\sin(\omega t)\sin(kx)\,\vec{u}_y$: ce champ, produit d'une fonction de la variable t par une fonction de la variable x est caractéristique d'une onde stationnaire.

Q.6- Pour $x = 0$; on vérifie que :

$$\vec{E}(0,t) = 2E_0\sin(\omega t)\sin(0)\,\vec{u}_y = \vec{0}$$

Q.7- Pour $x = L$: $\vec{E}(L,t) = 2E_0\sin(\omega t)\sin(kL)\,\vec{u}_y$

La condition aux limites $\vec{E}(L,t) = \vec{0}$ impose que $\sin(kL) = 0$. On en déduit que $kL = n\pi$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. En posant que $k = 2\pi/\lambda$ on vérifie que :

$$\boxed{L = \frac{n\lambda}{2}}$$

II. Résonance d'un tube acoustique ouvert à ses deux extrémités

Q.8- Par analogie, posons que :

$$f = \frac{c_{son}}{\lambda}$$

Pour la fréquence de rang n :

$$f_n = \frac{c_{son}}{\lambda_n} \quad \text{avec} \quad \lambda_n = \frac{2L}{n}$$

On établit que :

$$\boxed{f_n = \frac{nc_{son}}{2L}}$$

Q.9- Pour $n = 1$:

$$f_1 = \frac{c_{son}}{2L}$$

A.N. : $f_1 = 247$ Hz

Q.10- Pour $f_1 = 247$ Hz la note est un Si^2 (« Si » deuxième octave).

III. Son produit par une clarinette

Q.11- Dans le spectre fourni dans l'énoncé, on peut identifier la fréquence fondamentale $f_1 = 0{,}20\ kHz$ et un ensemble d'harmonique (très riche). Dans l'hypothèse que la clarinette puisse être modélisée par un tube ouvert à ses deux extrémités, la formule (3) serait vérifiée et on aurait :

$$f_1 = \frac{c_{son}}{2L}$$

Soit :

$$\boxed{L = \frac{c_{son}}{2f_1}}$$

A.N. : $L = 87$ cm

Q.12- Cette valeur ne correspond pas à celle fournie dans l'énoncé donc le modèle n'est pas vérifié. Pour mesurer la fréquence fondamentale avec plus de précision, on peut mesurer la fréquence du $n^{ième}$ harmonique et poser que $f_n = n.f_1$.

Pour $n = 47$: $f_n = 6{,}80\ KHz$ donc $f_1 = 145$ Hz et $L = 1{,}19$ m. On constate que la longueur calculée est quasiment 2 fois supérieure à la longueur de la clarinette. Ceci correspond au modèle d'un tube ouvert à l'une de ses extrémités et fermé à l'autre.

En effet, dans cette situation :

$L = \frac{\lambda}{4}$ un demi fuseau pour la fréquence fondamentale

$$f_1 = \frac{c_{son}}{\lambda} = \frac{c_{son}}{4L}$$

$L = \frac{c_{son}}{4f_1} = 59{,}6$ cm : proche de la longueur réelle