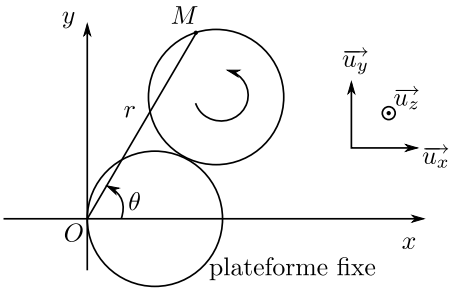
PCSI 1 & 3 2026-2027

Devoir Maison n° 5

Cinématique & Dynamique

Problème 1 Étude cinématique d'un manège

Dans le référentiel terrestre R, on définit un repère $Oxyz$ avec un axe (Oz) vertical ascendant. La figure ci-contre est une vue de dessus. Un manège est constitué de deux plateformes circulaires horizontales de même rayon R : l'une est immobile par rapport au référentiel terrestre, sa circonférence passe par l'origine O du repère et son centre est sur l'axe (Ox) ; l'autre peut rouler sans glisser autour de la première. On considère un enfant, assimilé à un point matériel M, qui a pris place sur le manège en un point de la circonférence de la plateforme mobile.



M décrit alors une trajectoire contenue dans le plan horizontal (Oxy) et décrite par l'équation polaire $r = 2R(1+\cos\theta)$ et on suppose de plus que la vitesse angulaire ω est maintenue constante, soit $\theta = \omega t$ à partir de l'instant initial $t = 0$.

A Trajectoire

A.1 Reproduire sur un schéma les axes du plan et le cercle représentant la plateforme fixe. Placer sur ce schéma les quatre points de la trajectoire de M correspondant aux angles $\theta = 0$ (ce point sera noté A), $\theta = \frac{\pi}{2}$ (point B), $\theta = \pi$ (point C), $\theta = \frac{3\pi}{2}$ (point D), puis dessiner l'allure de la trajectoire complète (cette courbe s'appelle une cardioïde). Ajouter la base cylindrique $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$ au point D.

B Vitesse

B.1 Déterminer, en fonction du temps t et des deux constantes R et ω dans la base cylindrique, les composantes du vecteur vitesse $\overrightarrow{v}(M)$ dans le référentiel terrestre.

B.2 Calculer la norme $v(M)$ de la vitesse. On rappelle la formule trigonométrique $1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$.

B.3 Calculer l'angle formé par les vecteurs $\overrightarrow{v}(M)$ et $\overrightarrow{u_r}$ puis dessiner le vecteur vitesse au point D.

B.4 En quel point l'enfant risque-t-il le plus d'être éjecté du manège (vitesse maximale), et dans quelle direction serait-il alors éjecté ?

B.5 En quel point l'enfant pourra-t-il essayer de descendre du manège (vitesse nulle) ?

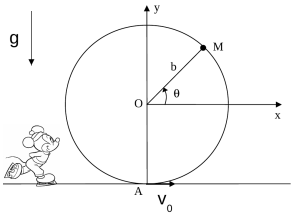
C Accélération

C.1 Déterminer les composantes du vecteur accélération $\overrightarrow{a}(M)$ dans la base cylindrique. Dessiner ce vecteur au point D.

C.2 Calculer la norme du vecteur accélération $\overrightarrow{a}(M)$.

C.3 Il n'existe pas de sensation absolue de vitesse, en revanche ce qu'on ressent fortement est l'accélération que l'on subit. En quel point l'enfant risque-t-il le plus de se sentir mal ?

Problème 2 Looping sur la glace



On considère un patineur assimilé à un point matériel M de masse $m = 60{,}0\,\text{kg}$. Celui-ci se déplace sans frottement **à l'intérieur** d'un guide circulaire de centre O et de rayon $b = 2{,}0\,\text{m}$. Le guide est placé dans un plan vertical du référentiel terrestre supposé galiléen. L'axe (Oy) est vertical ascendant. On note $g = 9{,}8\,\text{m/s}^2$ l'accélération de pesanteur au lieu considéré. Le patineur s'élance dans le guide au niveau du point A (en bas du guide) avec la vitesse initiale $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{u_x}$. Dans la suite, on prendra : $v_0 = 8{,}3\,\text{m/s}$.

A Première partie : mouvement dans le guide.

A.1 Pour une position quelconque de M sur le guide, rappeler la définition des vecteurs unitaires radial $\overrightarrow{u_r}$ et orthoradial $\overrightarrow{u_\theta}$ de la base polaire. Les faire apparaître sur un schéma.
Exprimer dans cette base, les vecteurs vitesse et accélération du point M.

A.2 Faire un bilan des forces s'exerçant sur le point M quand il est en contact avec le guide. On appellera $\overrightarrow{N}$ la force de contact du guide sur le patineur (= la réaction du support). Faire apparaître ces forces sur le schéma précédent.

A.3 Étude du mouvement à l'intérieur du guide.

A.3.1 Écrire la relation fondamentale de la dynamique dans le référentiel galiléen.

A.3.2 Projeter l'équation obtenue sur $\overrightarrow{u_\theta}$, puis la multiplier par $\dot{\theta}$. En déduire par intégration la relation entre $\dot{\theta}$ et θ, à l'instant t.

A.3.3 À partir de la relation précédente, exprimer le carré de la norme du vecteur vitesse $\|\overrightarrow{v}\|^2$ en fonction de la coordonnée y du point M et des constantes du problème.

A.3.4 En déduire la norme de $\overrightarrow{N}$ en fonction de y et des constantes du problème. En quel point, la norme $\|\overrightarrow{N}\|$ est-elle maximale ?

A.3.5 Pour quelle valeur y_1 de y le patineur quitte-t-il le guide ? Faire l'application numérique.

A.3.6 On note M_1 le point où le contact cesse. Déterminer ses coordonnées notées x_1 et y_1.

A.4 On appelle v_1 la norme de $\overrightarrow{v_1}$, vitesse au point M_1.

A.4.1 Exprimer v_1 en fonction de y_1 et des constantes du problème.

A.4.2 Quel est l'angle α_1 que fait le vecteur $\overrightarrow{v_1}$ avec l'axe (Ox) ? La réponse sera donnée en fonction de x_1 et y_1 coordonnées du point M_1. Donner l'application numérique.

A.4.3 Donner les valeurs des composantes suivant (Ox) et (Oy) de la vitesse au point M_1. Faire l'application numérique pour les composantes v_{1x} et v_{1y} ?

A.4.4 À quelle condition sur v_0 le patineur quittera-t-il le guide au cours de son mouvement ? Faire l'application numérique.

A.4.5 Quelle est la trajectoire suivie ensuite par le mobile après avoir quitté le guide ? On négligera toutes formes de frottement dans cette partie.

A.4.6 Déterminer les composantes v_{2x} et v_{2y} de la vitesse lorsque le mobile atteint l'axe (Ox). Faire l'application numérique.

A.4.7 En quel point M_2 de l'axe (Ox) le point M retombe-t-il ?

B Seconde partie : Mouvement sur le plat.

On considère maintenant que le sol a amorti la chute. À $t = 0$, la vitesse du patineur est alors à la composante horizontale de sa vitesse $\overrightarrow{v_2}$. On prendra une vitesse initiale $v_2 = 1{,}6\,\text{m/s}$.
Une fois arrivé sur le plat, le patineur doit s'arrêter promptement afin d'éviter de basculer dans un précipice insondable situé à une distance D du point d'impact. Pour cela, il optimise sa prise au vent, et subit ainsi une force de frottement fluide linéaire : $\overrightarrow{f} = -\alpha_F \overrightarrow{v}$.

B.1 Le frottement solide sur le sol est négligé dans un premier temps

B.1.1 Choisir le système de repérage adapté à cette étude. Préciser sur un schéma le repère utilisé et représenter les forces qui s'exercent sur le point M.

B.1.2 Établir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse v ($\overrightarrow{v} = v\overrightarrow{u_x}$) du point matériel.

B.1.3 Résoudre cette équation et exprimer la distance x_3 sur laquelle le point M va glisser.

B.1.4 Calculer numériquement x_3 puis conclure. On donne :
- $m = 60{,}0\,\text{kg}$
- $\alpha_F = 0{,}200\,\text{kg/s}$
- $D = 70{,}0\,\text{m}$

Discuter en quoi ce mouvement peut sembler paradoxal.

B.2 Prise en compte du frottement solide

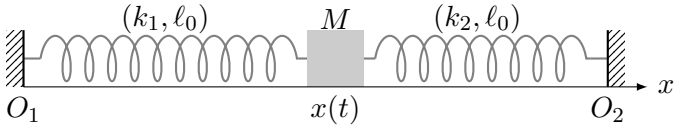
Devant le danger, le patineur décide de déraper sur ses patins afin d'exercer sur le sol une force de frottement solide de coefficient dynamique α_S. La force de réaction du support présente une composante normale $\overrightarrow{R_N}$ et une composante tangentielle $\overrightarrow{R_T}$ opposée à la vitesse, telle que $\overrightarrow{R_T} = -\alpha_S R_N \overrightarrow{u_x}$. Les conditions initiales et le frottement fluide sur l'air sont les mêmes que précédemment.

B.2.1 Après avoir représenté les forces sur un schéma, exprimer :
- l'expression de $\overrightarrow{R_N}$ en fonction des données,
- la vitesse $v(t)$ au cours du freinage,
- la durée t_m du freinage,
- la nouvelle distance d'arrêt x_4.

B.2.2 Calculer numériquement cette durée et cette distance. On donne : $\alpha_S = 0,0100$.

Problème 3 Un oscillateur qui ne manque pas de ressorts

Deux ressorts de masses négligeables, de mêmes longueurs à vide ℓ_0 et de raideurs k_1 et k_2 sont accrochés à un support fixe en O_1 et O_2 (voir la figure). L'autre extrémité de chaque ressort est fixée à un bloc de masse m posé sur un support horizontal. La longueur $L = O_1O_2$ étant supérieure à $2\ell_0$, les ressorts sont alors étirés. Les déplacements du bloc assimilé à un point M se font selon l'axe horizontal (O_1x) et nous pourrons négliger les frottements.



Le point M est repéré par son abscisse $x(t)$ à l'instant t, l'origine de l'axe étant prise en O_1. Le référentiel terrestre est supposé galiléen.

1. Exprimer les forces exercées sur M par les deux ressorts.
2. Déterminer la position x_0 de M à l'équilibre. Discuter des cas limites $k_1 = k_2$ et $k_1 \gg k_2$.
3. Montrer que l'association des deux ressorts est équivalente à un ressort dont on précisera la raideur k.
4. On pose $X = x - x_0$. Écrire l'équation différentielle vérifiée par X et la résoudre avec les conditions initiales $X(0) = 0$ et $\dot{X}(0) = v_0$.