Semaine de colles n°14 du 17/01/22 au 21/01/22

DU PROGRAMME PRECEDENT :

• Suites numériques

I – Généralités

II – Suites convergentes

III – Limites infinies

IV – Relations de comparaison

- Relation de domination, suite négligeable devant une autre, suites équivalentes : définitions, caractérisations par le quotient $\frac{u_n}{v_n}$, propriétés, compatibilité avec les opérations.
- Exemples de référence :
  - Si $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$, $(\ln n)^\beta = o(n^\alpha)$
  - Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\gamma > 0$, $n^\alpha = o(e^{\gamma n})$ ou autre formulation : Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x > 1$, $n^\alpha = o(x^n)$
  - Si $x > 0$, $x^n = o(n!)$
  - $n! = o(n^n)$
- ⚠ ON NE PEUT PAS AJOUTER DES EQUIVALENTS !!!! ON NE PEUT PAS COMPOSER DES EQUIVALENTS !!!!
- Lien entre équivalents et la limite d'une suite.

Rq. On pourra s'assurer que les élèves ont appris les définitions avec des petites démonstrations du type :
Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = O(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$ **(*)**

- Obtention d'un équivalent à l'aide d'un encadrement.
- Équivalents de références (à savoir redémontrer **(*)**)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle convergente vers 0. On a :

- $\sin u_n \sim u_n$ et $\tan u_n \sim u_n$
- $\cos u_n \sim 1$ et $1 - \cos u_n \sim \frac{u_n^2}{2}$
- $\text{sh } u_n \sim u_n$ et $\text{ch } u_n \sim 1$
- $e^{u_n} \sim 1$
- $e^{u_n} - 1 \sim u_n$
- $\ln(u_n + 1) \sim u_n$
- Pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$, **fixé** : $(1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha\, u_n$
- $\arccos(u_n) \sim \frac{\pi}{2}$
- $\arcsin(u_n) \sim u_n$ et $\arctan(u_n) \sim u_n$

V – Suites complexes

- Définition, suites bornées, limite, caractérisation à l'aide des parties réelles et imaginaires.
- Propriétés restant valables pour les suites complexes.

• Compléments : les suites récurrentes linéaires

I - Suites arithmétiques

II - Suites géométriques : Rappels succincts + Cas de convergence des suites géométriques complexes

III – Suites récurrentes linéaires d'ordre 1 ou arithmético-géométriques

IV – Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (Méthode d'étude provisoirement admise)

- Cas des suites complexes et réelles.

⚠ Rq. interrogateurs :
Les suites vérifiant une relation de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ n'ont pas encore été vue en classe.
Elles seront traitées après le chapitre sur la dérivabilité.

NOUVEAU COURS :

• Limites et continuité

I – Limite d'une fonction et continuité

- Notion de voisinage
- Définition limite (finie ou infinie) en un point (fini ou infini)
- Unicité de la limite.
- Toute fonction admettant une limite finie en un point est bornée au voisinage de ce point.
- Continuité en un point.
- Image d'une suite par une fonction, caractérisation séquentielle de la limite, de la continuité en un point.
  Application : comment montrer qu'une fonction n'a pas de limite en un point.
- Limite ou continuité à droite ou à gauche.

II – Règles de calculs

- Produit d'une fonction bornée au voisinage de a par une fonction tendant vers 0 en a.
- Opérations sur les limites : opérations algébriques et composition.
- Limite et ordre : signe et théorème d'encadrement dit des gendarmes.
- Théorème de la limite monotone.

III – Continuité sur un intervalle

- Définition, opérations sur les fonctions continues.
- Restriction et prolongement de fonctions continues, prolongement par continuité en un point.
- Image d'un intervalle par une fonction continue, théorème des valeurs intermédiaires, cas d'une fonction continue sur un **segment** de $\mathbb{R}$ (th des bornes atteintes).
- Bijection réciproque d'une fonction continue strictement monotone.

IV – Extension aux fonctions à valeurs complexes

- Limite en un point, continuité, traduction à l'aide des parties réelle et imaginaire.

⚠ Rq. interrogateurs :
Nous n'avons pas fait des exercices sur la continuité sur un intervalle mais le théorème des valeurs intermédiaires a déjà été vu en terminale.

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 15 : Dérivabilité

Déroulement d'une colle

1. Définition de f(x) → L quand x → a (Un cas parmi les 9 possibles).
2. Une ou deux questions parmi :
   Une question de cours parmi celles signalées par (*)
   Déterminer le terme général d'une SRL1 ou SRL2 + calcul éventuel de la limite.
   Un calcul de limite utilisant ou non des équivalents.
3. Exercice(s) au choix de l'interrogateur : On pourra commencer par un exercice à savoir refaire ou assez proche.

Un cours non connu entraine une note < 10.

Exercices à savoir refaire

Exercices Chap. 11

Exercice 12 : Calculer, si elles existent, les limites des suites suivantes dont on donne le terme général :

1. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ **2.** $u_n = \dfrac{n + (-1)^n}{n - (-1)^n}$ **5.** $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ **6.** $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$

7. $u_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$, $x \in \mathbb{R}$ **11.** $u_n = 2^n \sin\dfrac{\alpha}{2^n}$, $\alpha \in \,]0, \pi[$

Exercice 14 : ***Suite définie implicitement.***

⚠ LA METHODE POUR ETUDIER LE SENS DE VARIATION D'UNE SUITE DEFINIE IMPLICITEMENT DOIT ETRE CONNUE.

Pour tout entier $n \geq 3$ et pour tout réel $x > 0$, on pose : $f_n(x) = x - n \ln x$. On donne : $\ln(2) \approx 0{,}7$.

1. a. Soit $n \geq 3$. Étudier les variations de la fonction f_n sur son ensemble de définition.

b. Soit $n \geq 3$. Montrer qu'il existe un unique réel $x_n \in \,]1, 2[$ tel que : $f_n(x_n) = 0$.

2. a. Soit $n \geq 3$. Déterminer le signe de $f_n(x_{n+1})$.

En déduire que la suite (x_n) est monotone et donner son sens de monotonie.

b. Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 3}$ est convergente.

c. En utilisant que pour tout entier $n \geq 3$, $f_n(x_n) = 0$, montrer que : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} x_n = 1$.

Exercice 18 :

1. Soit (u_n) une suite à termes positifs, décroissante et convergente vers 0. On définit la suite (S_n) par : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$.

Montrer que (S_n) est convergente. *<u>Ind.</u> On pourra montrer que les suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.*

2. Montrer que $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}\right)_{n \geq 1}$ converge et déterminer sa limite. *<u>Ind.</u> On pourra utiliser que : $\forall\; k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k} = \displaystyle\int_0^1 t^{k-1}\,dt$.*

Exercice 8 + 21

0. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n} - u_n \geq \dfrac{1}{2}$. Que peut-on en déduire ?

1. Montrer que : $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \dfrac{1}{k}$.

2. En déduire que : $\forall\, n \geq 2$ $u_n - 1 \leq \ln(n) \leq u_n - \dfrac{1}{n}$.

3. En déduire que u_n est équivalent à $\ln(n)$ quand n tend vers $+\infty$.

4. On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = u_n - \ln n$. Montrer que (x_n) est convergente. On note γ cette limite, c'est la *<u>constante d'Euler</u>*.

Exercice 23 : Déterminer, si elles existent, les limites des suites dont on donne le terme général ci-dessous :

1. $u_n = n \ln\left(\sqrt{\dfrac{n+1}{n-1}}\right)$ **2.** $u_n = \sqrt{n}\sin\left(\dfrac{1}{\ln(n)}\right)$ **3.** $u_n = n\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)$ **4.** $u_n = \sqrt{n^2 + 36n + 12} - n$

5. $u_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$ **6.** $u_n = n\left(\sin\dfrac{1}{n} - \tan\dfrac{1}{2n}\right)$ **7.** $u_n = \left(2\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) + \cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^n$ **8.** $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)^{n^2}$

Exercice 25 :

Soit (x_n) et (y_n) deux suites réelles telles que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}(x_n - y_n)$ et $y_{n+1} = \dfrac{1}{2}(x_n + y_n)$. En introduisant la suite complexe de terme général : $z_n = x_n + i\, y_n$, montrer que les suites (x_n) et (y_n) convergent et déterminer leur limite.

Exercices Chap. 12

Exercice 4 :

Étudier la limite en 0 des fonctions $f : x \longmapsto \dfrac{x}{a}\left\lfloor \dfrac{b}{x} \right\rfloor$ et de $g : x \longmapsto \dfrac{a}{x}\left\lfloor \dfrac{x}{b} \right\rfloor$ où a et b sont deux réels strictement positifs.

Exercice 5 :

Déterminer, si elles existent, les limites de f en a.

a. $f : x \longmapsto e^{-x}\cos x$ en $a = +\infty$, puis $a = -\infty$. **b.** $f : x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x}$ en $a = 0$

c. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}$ en $a = 1$ **d.** $f : x \longmapsto \dfrac{x^2 - 2x - 3}{\sqrt{x+1}}$ en $a = -1$

Exercice 6 :

Est-ce que les fonctions suivantes sont continues en 0 ? Prolongeables par continuité en 0 ?

1. $f_1 : x \longmapsto \dfrac{\tan 3x}{x}$ **2.** $f_2 : x \longmapsto \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x}$ **3.** $f_3 : x \longmapsto \exp\dfrac{1}{x}$

4. $f_4 : x \longmapsto \begin{cases} (1+x)^{1/x} & \text{si } x \in \,]-1, +\infty[\; \backslash\; \{0\} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$ **5.** $f_5 : x \longmapsto \cos\dfrac{1}{x}$ **6.** $f_6 : x \longmapsto \sin x \cos\dfrac{1}{x}$

Exercice 9 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue en 0 et en 1, telle que : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(x^2) = f(x)$. Montrer que f est constante.

Exercice 12 :

1. Étudier la continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$.