ÉLÉMENTS DE CORRECTION DES EXERCICES DE RÉVISIONS

★ Calculs algébriques

1. $A=\dfrac{43}{20}$ $\quad B=-\dfrac{7}{27}$ $\quad C=\dfrac{12}{7}$

2. $A=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ $\quad B=\dfrac{1+\sqrt{3}}{1^2-3}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\sqrt{3}$ $\quad C=\dfrac{(\sqrt{3}+1)(2-\sqrt{3})}{2^2-3}=-1+\sqrt{3}$

A retenir : On évite d'écrire des radicaux aux dénominateurs des écritures fractionnaires.

3. $A=\dfrac{9!}{4!}$ $\quad B=\dfrac{12!4!}{8!7!}$ $\quad C=\dfrac{(n+2)!}{(n-1)!}$ si $n\geq 1$ *et* $C=0$ *pour* $n=0$

4. On simplifie avant de calculer :

$A=\dfrac{199!}{2!197!}=\dfrac{198\times 199}{2}=99\times 199=19900-199=19701$

$B=\dfrac{20!}{3!17!}=\dfrac{20\times 19\times 18}{2\times 3}=10\times 19\times 6=1140$

$C=\dfrac{16\times 17}{2}\times\dfrac{2\times 3}{17\times 18\times 19}=\dfrac{2^4\times 3}{19\times 2\times 3^2}=\dfrac{8}{57}$

$D=\dfrac{16\times 17}{2}\times\dfrac{5\times 4}{2}\times\dfrac{2\times 3}{18\times 19\times 20}=\dfrac{17\times 2^4\times 3}{2\times 19\times 2\times 3^2}=\dfrac{68}{57}$

5. $P_1(x)=-(x+2)(3x+7)$ $\quad P_2(x)=x(3x-7)$ $\quad P_3(x)=2(2x+3)(x+1)$

$P_4(x)=x^2(x+1)+(x+1)=(x^2+1)(x+1)$ $\quad P_5(1)=0$ donc $P_5(x)=(x-1)(3x^2+5x-2)=(x-1)(x+2)(3x-1)$

On pose $X=e^x$: $P_6(x)=X^2-(1+e)X+e=(X-1)(X-e)=(e^x-1)(e^x-e)$

6. $A=\dfrac{(x+1)(x-1)}{\sqrt{x+1}}=(x-1)\sqrt{x+1}$

En posant : $X=e^x$, on a : $B=\dfrac{X^2-X-2}{X+1}=\dfrac{(X+1)(X-2)}{X+1}=\dfrac{(e^x+1)(e^x-2)}{e^x+1}=e^x-2$

7. On a : $ab+bc+ac=0 \Leftrightarrow ab+bc=-ac \Leftrightarrow ab+ac=-bc \Leftrightarrow bc+ac=-ab$ d'où :

$$S=\frac{bc(b+c)+ac(a+c)+ab(a+b)}{abc}=\frac{b^2c+bc^2+a^2c+ac^2+a^2b+ab^2}{abc}$$
$$=\frac{a(ab+ac)+b(ab+bc)+c(bc+ac)}{abc}=\frac{a(-bc)+b(-ac)+c(-ab)}{abc}=-3$$

8. $A=\cos x+\cos(\pi-x)-\cos x=-\cos x$

$B=\cos^4 x-\sin^4 x+2\sin^2 x=(\cos^2 x-\sin^2 x)(\underbrace{\cos^2 x+\sin^2 x}_{=1})+2\sin^2 x=\cos^2 x+\sin^2 x=1$

$C=(\underbrace{\sin^2 x+\cos^2 x}_{=1})^3-3\sin^4 x\cos^2 x-3\sin^2 x\cos^4 x+3\sin^2 x\cos^2 x-1=-3\sin^2 x\cos^2 x(\cos^2 x+\sin^2 x)+3\sin^2 x\cos^2 x=0$

Car $\boxed{(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$.

★ Démonstration par récurrence

9. b. Initialisation : Pour $n=1$, $S_2=1^2=1$ et $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\dfrac{1\times 2\times 3}{6}=1$ donc l'égalité est vraie au rang 1.

Hérédité : On suppose l'égalité vraie pour un entier n, $n\geq 1$, fixé.

On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n+1}k^2=1^2+2^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=\sum_{k=1}^{n}k^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

L'égalité est alors vraie au rang $(n+1)$.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, l'égalité est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Les valeurs de ces deux sommes sont à connaître.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k = 1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+...+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

10. *Inégalité de Bernoulli.*

Soit P(n) : « $\forall\, a > 0,\ (1 + a)^n \geq 1 + na$ ».

Initialisation : Pour $n = 0$, on a : $\forall\, a > 0,\ (1+ a)^0 = 1 \geq 1+ 0 \times a$ donc l'égalité est vraie au rang 0.

Hérédité : On suppose P(n) vraie pour un entier $n \in \mathbb{N}$, fixé. Montrons que P(n + 1) est vraie.

Par hypothèse de récurrence, on a : $\forall\, a > 0,\ (1 + a)^n \geq 1 + na$.
Or $1 + a > 0$.
Donc : $\forall\, a > 0,\ (1 + a)^{n+1} \geq (1 + na)(1 + a)$
C'est-à-dire : $\forall\, a > 0,\ (1 + a)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)a + na^2 \geq 1 + (n + 1)a$ car $na^2 \geq 0$.
Donc P(n + 1) est vraie.
Conclusion : par principe de récurrence, on a : $\forall a > 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ (1 + a)^n \geq 1 + na$.

11. b. Lorsque $q = 1$, on a : $S_n = 1+1+1+...+1 = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$

c. $A_n = \dfrac{1-2^{n+1}}{1-2} = 2^{n+1}-1$ $\qquad B_n = \dfrac{2}{3}\left(1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$ $\qquad C_n = -\dfrac{1}{2}(1-3^n)$ $\qquad D_n = \sum_{k=0}^{n}\left(\dfrac{1}{3}\right)^k - 1 = \dfrac{1}{2}\left(1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right)$

★ **Résolutions d'équations**

12. Soit $x \in \mathbb{R}$, $E_1 \Leftrightarrow 3(4x+7)-5(x-5)=30 \Leftrightarrow 7x+46=30 \Leftrightarrow x=-\dfrac{16}{7}$ donc l'ensemble des solutions est : $S=\left\{-\dfrac{16}{7}\right\}$.

Soit $b \in \mathbb{R}^*$, $E_2 \Leftrightarrow \dfrac{2b-3}{2b}=\dfrac{10}{2b} \Leftrightarrow 2b-3=10 \Leftrightarrow b=\dfrac{13}{2}$ donc l'ensemble des solutions est : $S=\left\{\dfrac{13}{2}\right\}$.

Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\}$, $E_3 \Leftrightarrow 9(a + 1)(a - 1) = 8a(a - 1) + a(a + 1) \Leftrightarrow -9 = -7a \Leftrightarrow a = \dfrac{9}{7}$

Donc l'ensemble des solutions est : $S=\left\{\dfrac{9}{7}\right\}$

13. 1. $x^2+12x+35=0 \Leftrightarrow (x+6)^2-1=0$ donc l'ensemble des solutions est : $S = \{-5, -7\}$.

2. Le discriminant est $\Delta = 8 > 0$ donc l'équation a 2 solutions réelles et l'ensemble des solutions est : $S=\{5+\sqrt{2}, 5-\sqrt{2}\}$

3. Le discriminant est $\Delta = -4 < 0$ donc E_3 a 2 solutions complexes conjuguées. L'ensemble des solutions : $S=\{-2+i, -2-i\}$

4. $x^2-5=0 \Leftrightarrow x^2=5$ donc l'ensemble des solutions est $S=\{\sqrt{5}, -\sqrt{5}\}$

5. $3x^2+7x=0 \Leftrightarrow x(3x+7)=0$ donc l'ensemble des solutions est $S=\left\{0, -\dfrac{7}{3}\right\}$

6. $x^2+1=0 \Leftrightarrow x^2=-1$ donc pas de solution réelle. Dans $\mathbb{C}$, l'ensemble des solutions est : $S = \{i, -i\}$

14. On sait que si on note x_1 et x_2 les solutions, éventuellement confondues, de l'équation, alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.
En développant et par unicité de l'écriture polynomiale, on peut identifier les coefficients devant x et x^2, on trouve les égalités demandées.
On peut aussi reprendre les expressions de x_1 et x_2 en discutant selon le signe du discriminant Δ.

Applications :

E_1 : $(1+\sqrt{3})x^2-2\sqrt{3}x+\sqrt{3}-1=0$ on voit que 1 est racine évidente, le produit des racines est $\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$ donc l'ensemble des solutions est : $S = \{1, 2-\sqrt{3}\}$

Même méthode pour E_2 , on obtient que l'ensemble des solutions est : $S=\{1, -\dfrac{1515}{1514}\}$.

A retenir: En cas de racine évidente on n'a pas besoin de calculer le discriminant.

15. 1. On pose X = e^x et on a : $E_1 \Leftrightarrow X^2+(1-\sqrt{5})X-\sqrt{5}=0 \Leftrightarrow$ X= – 1 ou X= $\sqrt{5} \Leftrightarrow e^x = -1$ ou $e^x = \sqrt{5}$

Donc l'ensemble des solutions est : S = { $\frac{1}{2}\ln(5)$ }

2. $E_2 \Leftrightarrow \frac{2x^2-2x+1}{x(1-x)} = \frac{13}{6} \Leftrightarrow 25x^2-25x+6=0 \Leftrightarrow x=\frac{2}{5}$ ou $x=\frac{3}{5}$

3. On pose X = x^2 et on a : $E_3 \Leftrightarrow X^2 + 5X - 36 = 0 \Leftrightarrow X = 4$ ou $X = -9$ donc l'ensemble des solutions est : S = { – 2, 2}

Rq. Si on résout l'équation dans $\mathbb{C}$, l'ensemble des solutions est { $-3i$, $3i$, – 2, 2}

16. Le discriminant de cette équation est : $\Delta_m = (4m)^2 - 4 \times (m-1) \times (4m-1) = 20m - 4$.

• Si $\Delta_m = 20m - 4 < 0$ c'est-à-dire $m < \frac{1}{5}$ alors l'équation E_m n'a pas de solution réelle

Rq. Si on résout dans $\mathbb{C}$, l'équation à deux solutions complexes conjuguées :

$$\frac{4m+i\sqrt{4-20m}}{2(m-1)} = \frac{2m+i\sqrt{1-5m}}{m-1} \quad \text{et} \quad \frac{2m-i\sqrt{1-5m}}{m-1}$$

• Si $\Delta_m = 20m - 4 = 0$ c'est-à-dire $m = \frac{1}{5}$ alors l'équation E_m a une unique solution réelle dite double : $-\frac{1}{2}$

• Si $\Delta_m = 20m - 4 > 0$ c'est-à-dire $m > \frac{1}{5}$ alors l'équation E_m a deux solutions réelles :

$$\frac{4m+\sqrt{20m-4}}{2(m-1)} = \frac{2m+\sqrt{5m-1}}{m-1} \quad \text{et} \quad \frac{2m-\sqrt{5m-1}}{m-1}$$

17. On raisonne par équivalences :

$S_1 : \begin{cases} 2x-3y=3 \\ x+y=-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y=3 \\ y=-x-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3(-x-10)=3 \\ y=-x-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{27}{5} \\ y=-\frac{23}{5} \end{cases}$. Le système S_1 a pour unique solution $\left(-\frac{27}{5}, -\frac{23}{5}\right)$.

$S_2 : \begin{cases} -3x+2y=5 \\ 2x+5y=0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow 2L_1+3L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -3x+2y=5 \\ 19y=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{25}{19} \\ y=\frac{10}{19} \end{cases}$. Le système S_2 a pour unique solution $\left(-\frac{25}{19}, \frac{10}{19}\right)$.

$S_3 : \begin{cases} \sqrt{2}x-3y=2\sqrt{6} \\ -2x+3\sqrt{2}y=-4\sqrt{3} \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow \sqrt{2}L_1+L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \sqrt{2}x-3y=2\sqrt{6} \\ 0=0 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{2}x-3y=2\sqrt{6} \Leftrightarrow y=\frac{\sqrt{2}x-2\sqrt{6}}{3}$

Le système S_3 a pour ensemble de solutions : $\{(x, \frac{\sqrt{2}x-2\sqrt{6}}{3}), x \in \mathbb{R}\}$.

$S_4 : \begin{cases} mx-2y=m \\ -x+2my=0 \end{cases} \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -x+2my=0 \\ mx-2y=m \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2+mL_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -x+2my=0 \\ 2(m^2-1)y=m \end{cases}$.

Deux cas sont à considérer :

• 1[er] cas: $m^2 - 1 \neq 0$. Le système a une unique solution qui est le couple : $\left(\frac{m^2}{m^2-1}, \frac{m}{2(m^2-1)}\right)$.

• 2[ème] cas: $m^2 - 1 = 0$ c'est -à-dire $m \in \{-1, 1\}$.

Dans ce cas, l'équation $2(m^2-1)y = m$ n'a pas de solution.

18. La méthode consiste à raisonner graphiquement sur le cercle trigonométrique.

1. $E_1 \Leftrightarrow \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. $E_1 \Leftrightarrow \sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = -\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. $E_3 \Leftrightarrow \sin x = \dfrac{1}{2}$ ou $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. Posons $X = \sin x$, on a : $E_4 \Leftrightarrow 2X^2 - 3X - 2 = 0 \Leftrightarrow X = 2$ ou $X = -\dfrac{1}{2}$

Ainsi, on a : $E_4 \Leftrightarrow \sin x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

5. $E_5 \Leftrightarrow 2\cos x \sin x + \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x\,(2\cos x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = 0$ ou $\cos x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = k\pi$ ou $x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

OU $E_5 \Leftrightarrow \sin x = \sin(-2x) \Leftrightarrow x = -2x + 2k\pi$ ou $x = \pi + 2x + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$\Leftrightarrow 3x = 2k\pi$ ou $-x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$\Leftrightarrow x = \dfrac{2k\pi}{3}$ ou $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

6. $E_6 \Leftrightarrow \cos(2x) = \cos(\dfrac{\pi}{2} - 6x) \Leftrightarrow 2x = \dfrac{\pi}{2} - 6x + 2k\pi$ ou $2x = -\dfrac{\pi}{2} + 6x + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$\Leftrightarrow 8x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $-4x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{16} + k\dfrac{\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Rq, On pouvait aussi utiliser que : $\cos(2x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right)$.

19. La méthode consiste à raisonner graphiquement sur le cercle trigonométrique.

a. $\cos x \le \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x \in [-\pi, -\dfrac{\pi}{3}] \cup [\dfrac{\pi}{3}, \pi]$

b. $\sin x > -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x \in [0, \dfrac{4\pi}{3}] \cup [\dfrac{5\pi}{3}, 2\pi]$

c. $\sin x \ge \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \le x \le \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. L'ensemble des solutions sur I est donc $S = [\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}] \cup [\dfrac{13\pi}{6}, \dfrac{17\pi}{6}]$.

d. $\cos\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{3}\right) \le \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \le \dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{3} \le \dfrac{11\pi}{6} + 2k\pi \Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{3} + 4k\pi \le x \le 3\pi + 4k\pi$.

L'ensemble des solutions sur I est : $S = \{-\pi\} \cup [-\dfrac{\pi}{3}, \pi]$.

e. $2\cos(2t + \dfrac{\pi}{6}) > 1 \Leftrightarrow \cos(2t + \dfrac{\pi}{6}) > \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi < 2t + \dfrac{\pi}{6} < \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{4} + k\pi < t < \dfrac{\pi}{12} + k\pi$

L'ensemble des solutions sur I est donc $S = \left[0, \dfrac{\pi}{12}\right[\cup \left]\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{13\pi}{12}\right[\cup \left]\dfrac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$

★ Études de signes et inégalités

20. A a deux racines réelles 1 et $-\dfrac{1}{7}$ donc A(x) ≥ 0 ⇔ $x \in [-\dfrac{1}{7}, 1]$

• B n'a pas de racine réelle donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, B(x) > 0

• On trouve $C(x) = \dfrac{(2x+1)^2}{x(1+x)}$ existe pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ et C(x) est du signe de $x(x+1)$

Faire un tableau de signes et on obtient : C(x) > 0 ⇔ $x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$ et C(x) < 0 ⇔ $x \in]-1, 0[$

• Posons X = x^2, on a $D(x) = 3X^2 - 4X + 1 = (3X - 1)(X - 1) = (3x^2 - 1)(x^2 - 1) = (\sqrt{3}x - 1)(\sqrt{3}x + 1)(x - 1)(x + 1)$, puis dresser un tableau de signes.

• Posons X = e^x, on a $E(x) = 4X^2 + X - 5 = (4X + 5)(X - 1) = (4e^x + 5)(e^x - 1)$ donc E(x) est du signe de $(e^x - 1)$
C'est-à-dire : E(x) ≥ 0 ⇔ $x \geq 0$

• Si $x \leq 0$ alors par somme de termes négatifs, on a : $F(x) < 0$ (car $\forall x \in \mathbb{R}$, $-\sqrt{x^2+1} \leq -1 < 0$)

Si $x > 0$, on a : $F(x) = \dfrac{x^2 - (x^2+1)}{x + \sqrt{x^2+1}} = \dfrac{-1}{x + \sqrt{x^2+1}} < 0$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) < 0$.

OU On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \leq |x|$ et $|x| = \sqrt{x^2} < \sqrt{x^2+1}$
Par transitivité : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x < \sqrt{x^2+1}$ et ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) < 0$.

• Si $x \leq -1$ alors G(x) ≥ $\dfrac{1}{2}$ > 0 comme somme d'un terme positif et d'un terme strictement positif : $\forall x \leq -1$, $-\dfrac{1}{2}x \geq \dfrac{1}{2}$.

et si $x \geq 1$ alors $G(x) = \dfrac{x^2 - 1 - \frac{1}{4}x^2}{\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2}x} = \dfrac{(\sqrt{3}x - 2)(\sqrt{3}x + 2)}{4\sqrt{x^2-1} + 2x}$, puis dresser un tableau de signes.

Rq. Pour $x \in]-1, 1[$, l'expression n'est pas définie car $x^2 - 1 < 0$.

21. a. Soit $x \in \mathbb{R}$, $0 < x < 1$. On a : $x^2 - x = x(x-1) < 0$ donc $x^2 < x < 1$.

b. En multipliant l'égalité précédente par $x > 0$, on obtient $x^3 < x^2$ puis de même, $x^4 < x^3$, $x^5 < x^4$
C'est-à-dire : $0 < x^5 < x^4 < x^3 < x^2 < x < 1$ et donc $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 > 5x^5$.
c. La question précédente montre que l'équation n'a pas de solution dans]0, 1[.
On remarque que 1 est solution.
Si $x > 1$ alors de même, on a : $1 < x < x^2 < x^3 < x^4 < x^5$ et $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 < 5x^5$ et l'équation n'a pas de solution dans]1, + ∞[.
Conclusion : L'ensemble des solutions est S = {1}.

22. On étudie le signe de la différence des deux réels : $\dfrac{x+y}{x^2+y^2} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right) = \dfrac{x+y}{x^2+y^2} - \dfrac{x+y}{2xy} = -\dfrac{(x+y)(x-y)^2}{2xy(x^2+y^2)} \leq 0$.

Pour x et y strictement positifs, il est clair que la différence est négative, ainsi $\dfrac{x+y}{x^2+y^2} \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)$.

★ Calculs de limites

23. a. $\dfrac{2}{5}$ **b.** $\dfrac{3x^2 - 2x + 2}{2x^3 + x - 5} = \dfrac{x^2\left(3 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}{x^3\left(2 + \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2}\right)} = \dfrac{3 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}}{x\left(2 + \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2}\right)}$ donc $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{3x^2 - 2x + 2}{2x^3 + x - 5} = 0$

c. On a $\dfrac{\cos x - 1}{x} = \dfrac{\cos x - \cos 0}{x - 0}$ et la fonction cosinus est dérivable en 0 donc : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = \cos'(0) = \sin(0) = 0$

d. On a $\dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{\sin x - \sin 0}{x-0}$ et la fonction sinus est dérivable en 0 donc : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{2x} = \dfrac{1}{2}\sin'(0) = \dfrac{1}{2}\cos(0) = \dfrac{1}{2}$

e. Pour tout x réel, on a : $-1 \leq \sin x \leq 1$ donc pour tout x positif, $-\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{\sin x}{x} \leq \dfrac{1}{x}$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ donc en utilisant le théorème d'encadrement dit des gendarmes, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$

f. On a $\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \dfrac{\ln(1+x)-\ln(1+0)}{x-0}$ et la fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$ est dérivable en 0 donc : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \dfrac{1}{1+0} = 1$

g. On a $\dfrac{\ln(x)}{x-1} = \dfrac{\ln(x)-\ln(1)}{x-1}$ et la fonction $x \longmapsto \ln(x)$ est dérivable en 1 donc : $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = \ln'(1) = 1$

On a donc : $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\ln x} = \dfrac{1}{1} = 1$

Rq. On pouvait aussi poser : $h = x - 1$ pour se ramener à une limite quand h tend vers 0.

h. Par croissances comparées : $\lim\limits_{x\to 0+} x^2 \ln x = 0$

i. On reconnait un taux d'accroissement et la fonction exponentielle est dérivable en 0 : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = \exp'(0) = 1$

j. Par croissances comparées : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^3} = +\infty$

k. Par croissances comparées : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^5 e^x = 0$

l. Par somme de limites nulles : $\lim\limits_{t\to+\infty} \left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{2t}\right) = 0$

m. Pour $x \neq 0$, on a : $\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2x}} = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{2x}{1} = 2$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2x}} = 2$

n. On a : $\dfrac{2x^2-x-1}{x-1} = \dfrac{(2x+1)(x-1)}{x-1} = 2x+1$ donc $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2-x-1}{x-1} = 3$

Par composition de limites : $\lim\limits_{x\to 1} \ln\left(\dfrac{2x^2-x-1}{x-1}\right) = \ln 3$

o. $\lim\limits_{t\to+\infty} -t^2+1 = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$ donc par composition de limites $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t^2+1} = 0$

p. On a : $\ln(x^2+1) - \ln(x+3) = \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x+3}\right) = \ln\left(\dfrac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}\right) = \ln\left(\dfrac{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{1+\frac{3}{x}}\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{1+\frac{3}{x}} = +\infty$

Donc par composée : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\ln(x^2+1) - \ln(x+3)\right) = +\infty$

★ **<u>Dérivation / Calcul de dérivées</u>**

24. f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_1'(x) = 2\ln(x^2+1) + 2x\dfrac{2x}{x^2+1}$

f_2 est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x > 0$, $f_2'(x) = \sqrt{x} + (x+1)\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{3x+1}{2\sqrt{x}}$

f_3 est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \neq 0$, $f_3'(x) = \dfrac{2xe^{x^2+1}x - e^{x^2+1}}{x^2} = \dfrac{2x^2-1}{x^2}e^{x^2+1}$

f_4 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_4'(x) = -2\omega\sin(\omega t + \frac{\pi}{4})\cos(\omega t + \frac{\pi}{4}) = -\omega\sin(2\omega t + \frac{\pi}{2}) = -\omega\cos(2\omega t)$

f_5 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_5\,'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \times \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x}{x^2+1}$

f_6 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_6\,'(x) = -e^{-x\cos x} - e^{-x}\sin x = -e^{-x}(\cos x + \sin x)$

f_7 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f_7\,'(x) = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$

f_8 est dérivable sur $]1;+\infty[$ et pour tout $x > 1$, $f_8\,'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \dfrac{1}{x\ln x}$

★ **Calculs de primitives**

25. Une primitive sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$. Est : $F_1 : x \mapsto 3x + \ln|x| - \dfrac{1}{x}$

f_2 est de la forme $\frac{1}{2}$u'/u donc une primitive sur $\mathbb{R}$ est $F_2 : x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$

$f_3(x) = 1 - \dfrac{2}{x+1}$ donc une primitive sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ est $F_3 : x \mapsto x - 2\ln|x+1|$.

f_4, f_5 et f_6 sont de la forme $ku'u^\alpha$ donc $F_4 : x \mapsto \dfrac{1}{2}\dfrac{(2x+1)^3}{3}$ sur $\mathbb{R}$, $F_5 : x \mapsto \dfrac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}$ sur $]-1;+\infty[$ et $F_6 : x \mapsto -2\sqrt{1-x}$ sur $]-\infty;1[$.

f_7 est de la forme u'e^u donc une primitive sur $\mathbb{R}$ est $F_7 : x \mapsto -\dfrac{1}{k}e^{-kx}$.

f_8 est de la forme u'u donc une primitive sur $]0;+\infty[$ est $F_8 : x \mapsto \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$

$F_9 : x \mapsto \dfrac{1}{a}\sin(ax+b)$ sur $\mathbb{R}$

$f_{10}(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$ donc une primitive sur $\mathbb{R}$ est $F_{10} : x \mapsto \dfrac{2x + \sin 2x}{4}$

26. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $\displaystyle\int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

b. $\displaystyle\int_0^1 \left(4x^7 - 2x^3 + 3x^2 - 2\right)dx = \left[4\frac{x^8}{8} - 2\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3} - 2x\right]_0^1 = \frac{4}{8} - \frac{2}{4} + \frac{3}{3} - 2 = -1$

c. $\displaystyle\int_{-3}^{-2} \frac{du}{u} = \left[\ln|u|\right]_{-3}^{-2} = \ln 2 - \ln 3 = \ln\frac{2}{3}$

d. $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)dx = \left[\ln|x| + \frac{1}{x}\right]_1^2 = \ln 2 + \frac{1}{2} - 1 = \ln 2 - \frac{1}{2}$

e. $\displaystyle\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{3x}{\sqrt{1+x^2}}dx = 3\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}dx = 3\left[\sqrt{1+x^2}\right]_{-1}^{\sqrt{3}} = -3\sqrt{2} + 6$ (On reconnait une expression de la forme $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$)

f. $\displaystyle\int_0^1 te^{t^2-1}dt = \frac{1}{2}\int_0^1 2te^{t^2-1}dt = \frac{1}{2}\left[e^{t^2-1}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$

g. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(x-1)^2} = \left[-\frac{1}{x-1}\right]_0^{1/2} = \left[\frac{1}{1-x}\right]_0^{1/2} = 2 - 1 = 1$

h. $\displaystyle\int_e^2 \frac{dt}{t(\ln t)^2} = \left[-\frac{1}{\ln t}\right]_e^2 = 1 - \frac{1}{\ln 2} =$ (On reconnait une expression de la forme $-\dfrac{u'}{u^2}$)

i. On a : $\dfrac{1}{1+e^x}=\dfrac{1+e^x-e^x}{1+e^x}=1-\dfrac{e^x}{1+e^x}$ et

$$\int_0^1\frac{dx}{1+e^x}=\int_0^1\left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx=\left[x-\ln(1+e^x)\right]_0^1=1-\ln(1+e)+\ln 2=\ln(e)-\ln(1+e)+\ln 2=\ln\left(\frac{2e}{1+e}\right)$$

j. On a : $\dfrac{2t-1}{t-1}=\dfrac{2(t-1)+1}{t-1}=2+\dfrac{1}{t-1}$

Déterminer a et b deux réels tels que $\dfrac{2t-1}{t-1}=a+\dfrac{b}{t-1}$ et calculer $\displaystyle\int_2^4\frac{2t-1}{t-1}dt=\int_2^4\left(2+\frac{1}{t-1}\right)dt=\left[2t+\ln(t-1)\right]_2^4=4+\ln 3$

27. a. $\displaystyle\int_0^5 xe^{-x}dx=1-6e^{-5}$ **b.** $\displaystyle\int_1^e x\ln x\,dx=\frac{1}{4}(1+e^2)$ **c.** $\displaystyle\int_1^2(x^2-x+1)\ln x\,dx=\frac{8}{3}\ln 2-\frac{37}{36}$

d. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}x\cos(x)\,dx=\frac{\pi}{2}-1$ **e.** $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi}(x^2-3x)\sin(2x)\,dx=\frac{1}{8}(4+18\pi-5\pi^2)$ **f.** $\displaystyle\int_e^2\ln x\,dx=\ln 4-2=2\ln 2-2$

g. $\displaystyle\int_1^4\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx=4\ln 4-4=8\ln 2-4$ **h.** $\displaystyle\int_{1/4}^1\sqrt{x}\ln x\,dx=\frac{1}{12}\ln 4-\frac{7}{18}$

28. a. On a : $I_2=e-\sqrt{e}$

b. On réalise une intégration par parties avec $u(x)=\dfrac{1}{x^{n-1}}=x^{-n+1}$ et $v'(x)=\dfrac{1}{x^2}e^{1/x}$

c. On obtient : $I_3=\dfrac{1}{2}\sqrt{e}$

★ **<u>Equations différentielles</u>**

29. a. Les solutions sont les fonctions de la forme : $x\longmapsto\lambda e^{2x}-\dfrac{3}{2}$, $\lambda\in\mathbb{R}$

b. Les solutions sont les fonctions de la forme : $x\longmapsto\lambda e^{-3x/2}+\dfrac{5}{3}$, $\lambda\in\mathbb{R}$

c. Les solutions sont les fonctions de la forme : $x\longmapsto\lambda e^{-4x}-\dfrac{1}{4}$, $\lambda\in\mathbb{R}$

d. L'unique solution est la fonction : $x\longmapsto\dfrac{3}{5}-\dfrac{13}{5}e^{-5x}$

e. L'unique solution est la fonction : $x\longmapsto\dfrac{1}{2}e^{-2(x+2)}$

<u>Rappel pour les 3 derniers exemples :</u>

Les solutions de l'équation différentielle $y'=ay+f$ (E) sont les fonctions de la forme : $x\longmapsto\lambda\, e^{ax}+f_p(x)$ où $\lambda\in\mathbb{R}$ et f_p est une solution particulière de (E).

f. Les solutions sont les fonctions de la forme : $x\longmapsto\lambda e^{2x}-e^x$, $\lambda\in\mathbb{R}$

g. Les solutions sont les fonctions de la forme : $x\longmapsto(\lambda+x)e^{2x}$, $\lambda\in\mathbb{R}$

h. Les solutions sont les fonctions de la forme : $x\longmapsto\lambda e^{-3x}+\dfrac{3}{10}\sin x-\dfrac{1}{10}\cos x$, $\lambda\in\mathbb{R}$

★ **Dénombrement**

30. a.

- Un code à 4 chiffres est une 4 liste de l'ensemble $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Il y a donc 10^4 codes possibles.
- Un code avec des chiffres deux à deux distincts est un 4-arrangement de l'ensemble $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.

Il y en a donc $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$.

- Le complémentaire de l'ensemble des codes contenant le chiffre 1 est l'ensemble des codes ne contenant pas le chiffre 1.

Il s'agit des 4-listes de l'ensemble $\{0, 2, \ldots, 9\}$. Le cardinal du complémentaire est donc égal à 9^4.
On en déduit que le nombre de codes contenant le chiffre 1 est $10^4 - 9^4$.

- Un tel code est défini par l'emplacement des deux chiffres 8 et le choix de deux autres chiffres différents de 8.

Il y en a donc $\binom{4}{2} \times 9^2 = 486$

- Un tel code est défini en ordonnant par ordre croissant une 4-combinaison de l'ensemble $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.

Il y en a donc $\binom{10}{4} = 210$

b.

- Une main de 8 cartes dans un jeu de 52 est une 8-combinaison de l'ensemble des cartes. Il y a donc $\binom{52}{8}$ mains possibles
- Une telle main s'obtient en choisissant 3 cartes rouges parmi 26 et 5 cartes noires parmi 26. Il y en a donc $\binom{26}{3} \times \binom{26}{5}$
- Le complémentaire contient les mains ne contenant aucun cœur, c'est-à-dire les 8-combinaisons de l'ensemble des cartes privé des 13 cœurs. Le complémentaire a donc pour cardinal $\binom{39}{8}$.

Les mains contenant au moins un cœur sont au nombre de $\binom{52}{8} - \binom{39}{8}$

- Une telle main s'obtient en choisissant 3 cœurs parmi les 13 cours et 5 cartes parmi les 39 restantes. Il y en a donc $\binom{13}{3} \times \binom{39}{5}$
- Il faut ici faire une partition de ces mains selon qu'elles contiennent ou non le roi de cœur.

On raisonne comme précédemment.

Le nombre de mains contenant exactement 2 rois et 3 cœurs dont le roi de cœur est $\underbrace{\binom{1}{1}}_{\text{roi de coeur}} \times \overbrace{\binom{3}{1}}^{\text{2ème roi}} \times \underbrace{\binom{12}{2}}_{\text{autre coeurs}} \times \overbrace{\binom{36}{4}}^{\text{autres cartes}}$

Le nombre de mains contenant exactement 2 rois et 3 cœurs sans le roi de cœur est $\overbrace{\binom{3}{2}}^{\text{roi}} \times \underbrace{\binom{12}{3}}_{\text{coeurs}} \times \overbrace{\binom{36}{3}}^{\text{autres cartes}}$

Au total le nombre de mains cherchées est donc $\binom{1}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{12}{2} \times \binom{36}{4} + \binom{3}{2} \times \binom{12}{3} \times \binom{36}{3}$