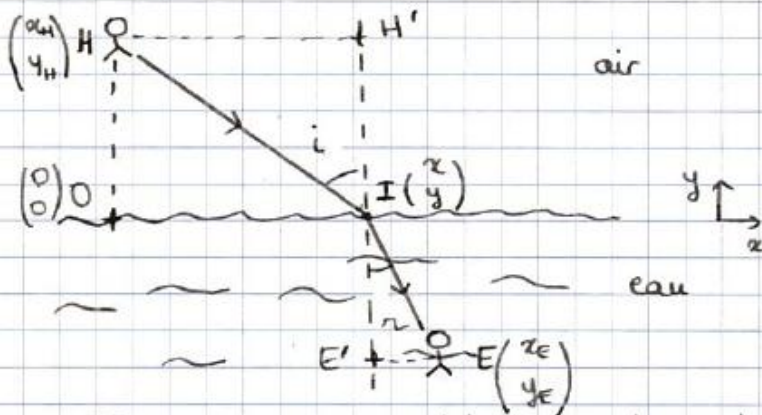


TD01- OPTIQUE GÉOMETRIQUE (1)

Corrigé

EXERCICE 1 - Voir CoursEXERCICE 2 - Résolution de problème

Quelle portion de I permettra à l'homme d'atteindre l'enfant le plus vite possible?

Temps de parcours dans l'air:

$$t_{\text{air}} = \frac{HI}{v_{\text{air}}}$$

Temps de parcours dans l'eau:

$$t_{\text{eau}} = \frac{IE}{v_{\text{eau}}}$$

Temps de parcours total: $t = t_{\text{air}} + t_{\text{eau}} = \frac{HI}{v_{\text{air}}} + \frac{IE}{v_{\text{eau}}}$

or $HI = \sqrt{(x - x_H)^2 + (y - y_H)^2}$ et $IE = \sqrt{(x_E - x)^2 + (y_E - y)^2}$

avec $x_H = 0$ et $y = 0$ on a

$$t = \frac{\sqrt{x^2 + y_H^2}}{v_{\text{air}}} + \frac{\sqrt{(x_E - x)^2 + y_E^2}}{v_{\text{eau}}}$$

On cherche l'abscisse x tq t soit minimal. On cherche donc x tq :

$$\frac{dt}{dx} = 0$$

or $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{v_{\text{air}}} \times \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y_H^2}} \times 2x + \frac{1}{v_{\text{eau}}} \times \frac{1}{2\sqrt{(x_E - x)^2 + y_E^2}} \times 2(x - x_E)$

$$= \frac{(x - x_H)}{v_{\text{air}} HI} + \frac{(x - x_E)}{v_{\text{eau}} IE}$$

$$= \frac{1}{v_{\text{air}}} \frac{HH'}{HI} + \frac{-EE'}{EI} \times \frac{1}{v_{\text{eau}}} = \frac{1}{v_{\text{air}}} \sin(i) - \frac{1}{v_{\text{eau}}} \sin(r)$$

$$\frac{dt}{dx} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{v_{\text{eau}} \sin(i) = v_{\text{air}} \sin(r)}$$

Tout dépend ensuite de la vitesse de l'homme dans l'air et dans l'eau.

Remarque: si l'homme allait à la vitesse de la lumière, $v_{\text{air}} = c$ et $v_{\text{eau}} = \frac{c}{n_{\text{eau}}}$

alors $\frac{c}{n_{\text{eau}}} \sin(i) = c \sin(r) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\sin(i) = n_{\text{eau}} \sin(r)}$

$\Rightarrow$ on retrouve la loi de Snell Descartes pr la réfraction.

Cela signifie que la lumière suit toujours le chemin le plus court (principe de Fermat).

EXERCICE 3

Pour être dans l'AOG, on doit pouvoir négliger la diffraction, c'est à dire avoir

$$a \gg \lambda \leftarrow \begin{array}{l} \text{longueur d'onde de} \\ \text{la lumière visible} \end{array}$$

diamètre de l'appareil
photo

Ici $a = 1,8 \text{ mm}$ et $\lambda \in [380, 750 \text{ nm}]$.

Pour être dans l'AOG, on choisit le critère $a \gtrsim 1000 \lambda$.

Ici,

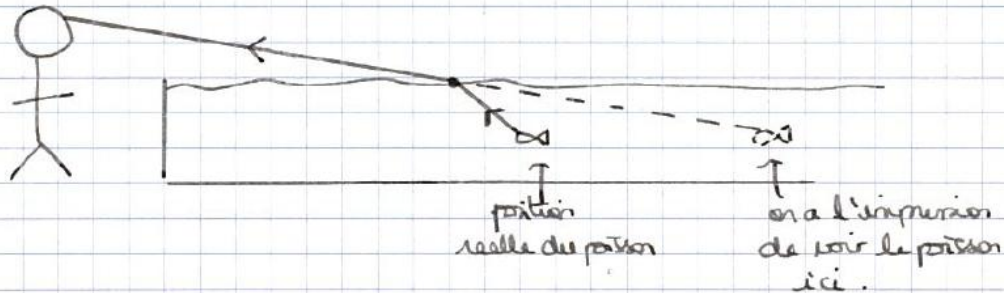
$$1000 \lambda \approx 1000 \times 500 \text{ nm} = 500 \mu\text{m} = 0,5 \text{ mm}.$$

or $a = 1,8 \text{ mm}$ donc $a > 1000 \lambda$

→ On peut utiliser l'AOG pour l'ephore GS.

EXERCICE 4

Pour viser le poisson il faut viser "devant" lui :

EXERCICE 5

$$1. \begin{cases} \sin(i) = n \sin(r) \\ n \sin(r') = \sin(i') \end{cases}$$

2. La somme des angles d'un triangle vaut $\pi \text{ rad}$. Dans le triangle IAI' :

$$\pi = A + \left(\frac{\pi}{2} - r\right) + \left(\frac{\pi}{2} - r'\right)$$

donc $\pi = \pi + A - r - r' \Rightarrow$ $A = r + r'$

3. En I le rayon incident subit une déviation $D_1 = i - r$
En I' " " " " $D_2 = i' - r'$

Donc

$$D = (i - r) + (i' - r') \Rightarrow \text{ } D = i + i' - A \text{ }$$

$$4. \begin{cases} \sin(i) = n \sin(r) & (1) \\ \sin(i') = n \sin(r') & (2) \\ A = r + r' & (3) \end{cases}$$

Rappel : on définit la différentielle comme : $df = \left(\frac{df}{dx}\right) dx$ (voir cours Outils pour la Physique).

On différencie la relation (1) : $d(\sin(i)) = d(n \sin(r))$

On en déduit, à partir de la définition de la différentielle: $\cos(i) di = n \cos(r) dr$. Ainsi, $di = \frac{n \cos(r)}{\cos(i)} dr$.

De la même manière, on différencie la relation (2) : $d(\sin(i')) = d(n \sin(r'))$.

On en déduit, à partir de la définition de la différentielle : $\cos(i') di' = n \cos(r') dr'$. Ainsi, $di' = \frac{n \cos(r')}{\cos(i')} dr'$.

Ce qui amène à la relation donnant la dérivée de i' par rapport à la variable i : $\frac{di'}{di} = \frac{\cos(r') \cos(i)}{\cos(i') \cos(r)} \frac{dr'}{dr}$.

Or, d'après (3), $r' = A - r$ donc $\frac{dr'}{dr} = 0 - 1 = -1$ car A ne dépend pas de r . Ainsi, $\frac{di'}{di} = -\frac{\cos(r') \cos(i)}{\cos(i') \cos(r)}$

$$4. \frac{dD}{di} = 1 + \frac{di'}{di} + 0 \quad (\text{car } A = \text{cte et } \frac{di}{di} = 1)$$

donc

$$\frac{dD}{di} = 1 - \frac{\cos(i) \cos(r')}{\cos(i') \cos(r)}$$

on cherche i_m tq $\frac{dD}{di}(i_m) = 0$ (extremum)

$$\Rightarrow 1 = \frac{\cos(i_m) \cos(r')}{\cos(i') \cos(r)}$$

on élève au carré :

$$1 = \frac{\cos^2(i_m) \cos^2(r')}{\cos^2(i') \cos^2(r)} \Leftrightarrow \cos^2(i') \cos^2(r) = \cos^2(i_m) \cos^2(r')$$

on utilise la relation $\cos^2 = 1 - \sin^2$ et on obtient :

$$(1 - \sin^2(i'))(1 - \sin^2(r)) = (1 - \sin^2(i_m))(1 - \sin^2(r'))$$

En utilisant les relations de la question 1 :

$$(1 - \sin^2(i'))(1 - \frac{\sin^2(i_m)}{n^2}) = (1 - \sin^2(i_m))(1 - \frac{\sin^2(i')}{n^2})$$

$\Rightarrow$

$$-\sin^2(i') - \frac{\sin^2(i_m)}{n^2} = -\sin^2(i_m) - \frac{\sin^2(i')}{n^2}$$

$$\Leftrightarrow n^2 \sin^2(i') + \sin^2(i_m) = n^2 \sin^2(i_m) + \sin^2(i')$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(1 - n^2)(\sin^2(i_m) - \sin^2(i')) = 0}$$

Comme $n \neq 1$, $1 - n^2 \neq 0$ et donc $\sin^2(i_m) = \sin^2(i')$

or i_m et $i' \in [0, \frac{\pi}{2}]$ donc $\boxed{i_m = i'}$

$$5. \text{ On a } \sin(i_m) = n \sin(r) \quad (1)$$

$$\text{Or } A = r + r' \text{ et } D_m = i_m + i' - A$$

$$\text{Au minimum, } i_m = i' \text{ et donc } r = r' = \frac{A}{2} \quad (2)$$

$$i_m = i' \Rightarrow D_m = 2i_m - A \Rightarrow i_m = \frac{D_m + A}{2}$$

en remplaçant dans (1) r et i_m par leurs expressions trouvées en (2) et (3) :

$$\boxed{n \sin\left(\frac{A}{2}\right) = \sin\left(\frac{D_m + A}{2}\right)}$$

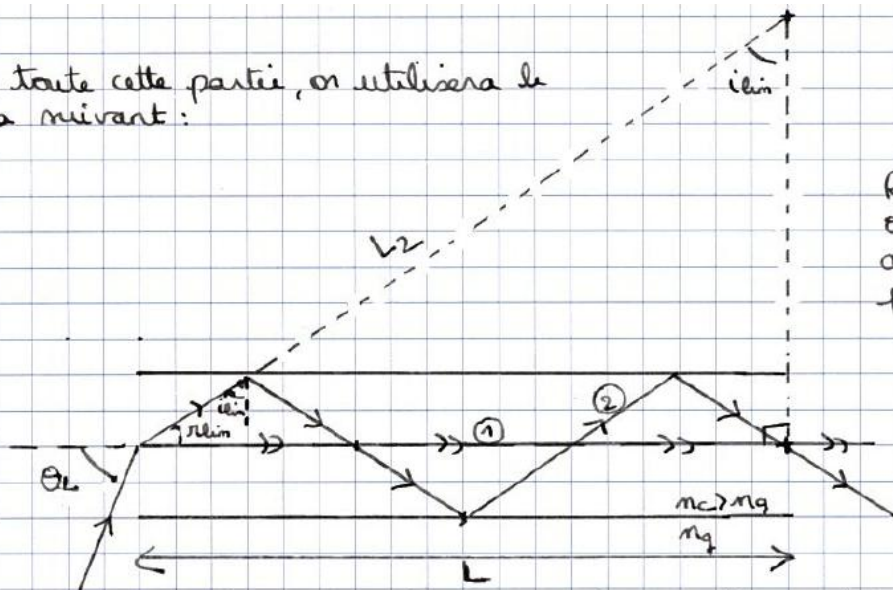
$\rightarrow$ Pour mesurer l'indice d'un matériau, on mesure le minimum de déviation des rayons arrivant sur une prisme construit en ce matériau (d'angle A connu). On en déduit :

$$\boxed{n = \frac{\sin\left(\frac{D_m + A}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}}$$

D_m et A
étant connus.

EXERCICE 6

Dans toute cette partie, on utilisera le schéma suivant :



B.1. Le rayon reste confiné dans le cœur s'il y a réflexion totale au niveau de i :
 $i \geq i_{\text{lim}}$ avec $\sin(i_{\text{lim}}) = \frac{n_g}{n_c}$

$$\text{or, } i_{\text{lim}} + r_{\text{lim}} = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad n_a \sin(\theta_L) = n_c \sin(r_{\text{lim}})$$

$$i \geq i_{\text{lim}} \Rightarrow \frac{\pi}{2} - r \geq \frac{\pi}{2} - r_{\text{lim}} \Rightarrow r \leq r_{\text{lim}}$$

or $r \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $\sin$ $\nearrow$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ donc $r \leq r_{\text{lim}} \Rightarrow \sin(r) \leq \sin(r_{\text{lim}})$
 et donc $n_c \sin(r) \leq n_c \sin(r_{\text{lim}})$

$$\Rightarrow n_a \sin(\theta) \leq n_a \sin(\theta_L) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta \leq \theta_L}$$

$$\text{or } n_a \sin(\theta_L) = n_c \sin(r_{\text{lim}}) = n_c \sin\left(\frac{\pi}{2} - i_{\text{lim}}\right) = n_c \cos(i_{\text{lim}})$$

$$\Rightarrow n_a \sin(\theta_L) = n_c \sqrt{1 - \sin^2(i_{\text{lim}})} = n_c \sqrt{1 - \left(\frac{n_g}{n_c}\right)^2}$$

et donc

$$\theta_L = \arcsin\left(\frac{1}{n_a} \sqrt{n_c^2 - n_g^2}\right)$$

$$\text{On a donc bien } \boxed{\theta \leq \theta_L \text{ avec } \theta_L = \arcsin\left(\frac{1}{n_a} \sqrt{n_c^2 - n_g^2}\right)}$$

A.N. $\theta = 12^\circ$

Remarque: l'énoncé demandait uniquement en fonction de n_c et n_g , on pourrait poser $n_a = 1,000$ (sans dimension).

B.2. Le rayon qui met le $\ominus$ de temps à traverser la fibre est le rayon "qui va tout droit" (rayon ① sur schéma) car c'est celui qui parcourt la plus petite distance.

$$\text{on a } v_1 = \frac{L}{T_1} \quad \text{avec } v_1 = \frac{c}{n_c} \quad \text{donc } \frac{c}{n_c} = \frac{L}{T_1}$$

$$\text{et donc } \boxed{T_1 = n_c \frac{L}{c}}$$

B.3. Le rayon qui met le + de temps à traverser la fibre est le rayon qui entre avec $\theta = \theta_{\text{lim}}$ (rayon ②).

on a $v_2 = \frac{L_2}{T_2}$ avec $v_2 = v_1 = \frac{c}{n_c}$ et L_2 la distance parcourue par le rayon ②.

le schéma donne: $\sin(i_{\text{lim}}) = \frac{L}{L_2}$ or $\sin(i_{\text{lim}}) = \frac{n_g}{n_c}$

donc $\frac{n_g}{n_c} = \frac{L}{L_2} \Rightarrow L_2 = \frac{n_c}{n_g} L$ et donc $T_2 = n_c \frac{L_2}{c}$ ce qui donne:

$$T_2 = \frac{n_c^2 L}{n_g c}$$

$$B.4. \delta T = T_2 - T_1 \Rightarrow \frac{n_c L}{c} \left(\frac{n_c}{n_g} - 1 \right) = \delta T$$

$$\text{On pose } 2\Delta = 1 - \left(\frac{n_g}{n_c} \right)^2 \text{ donc } \frac{n_c}{n_g} = \frac{1}{\sqrt{1-2\Delta}}$$

$$\text{or } 2\Delta \ll 1 \Rightarrow \frac{n_c}{n_g} \sim 1 + \left(-\frac{1}{2} \right) \times 2\Delta = 1 + \Delta \quad \left(\text{en effet } \frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} \text{ avec } x = -\frac{1}{2} \right)$$

$$\text{donc } \delta T \sim \frac{n_c L}{c} (1 + \Delta - 1)$$

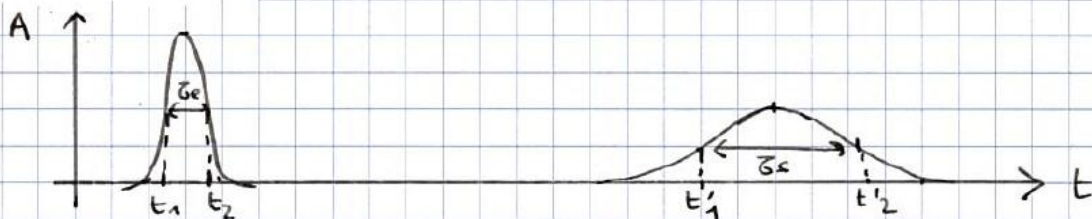
$$\Rightarrow \boxed{\delta T \sim \frac{n_c L \Delta}{c}}$$

A.N. Δ n'étant pas donné numériquement, pour l'A.N. on utilise l'exp. littérale:

$$\boxed{\delta T = \frac{n_c L}{c} \left(\frac{n_c}{n_g} - 1 \right)}$$

$$A.N. \delta T = \frac{1,500 \times 10.10^3}{3,00.10^8} \left(\frac{1,500}{1,485} - 1 \right) \Rightarrow \underline{\delta T = 5,0.10^{-7} \text{ s}}$$

B.5.



On a $\Delta t = t'_2 - t'_1$. Les premiers rayons à sortir ont été émis aux instants proches de t_1 et ont mis T_1 à sortir. Les derniers ont été émis à t_2 et ont mis un temps T_2 .

On peut donc écrire:

$$\Delta t = (t_2 + T_2) - (t_1 + T_1)$$

$$\text{Soit } \boxed{\Delta t = \Delta t_c + \delta T}$$

$$B.6. \Delta t_c \ll \delta T \Rightarrow \Delta t = \delta T$$

Pour que les impulsions en sortie ne se recouvrent pas, il faut qu'elles soient séparées d'un temps T plus grand que τ_s .

il faut donc $\Rightarrow$ $\tau_{\text{émission}} \geq \tau_s$
 $f \leq \frac{1}{\tau_s}$

or $\tau_s = \delta T$ donc $f \leq \frac{1}{\delta T} = f_{\text{max}} \Rightarrow \boxed{f_{\text{max}} = \frac{1}{\delta T}}$

B.7. Détermination L_{max} . on a $f_{\text{max}} = \frac{1}{\delta T} = \frac{c}{n_c L_{\text{max}} \Delta}$

donc

$L_{\text{max}} f_{\text{max}} = \frac{c}{n_c \Delta} \Rightarrow \boxed{B = \frac{c}{n_c \Delta}}$

On introduit cette grandeur car elle ne dépend que des caractéristiques optiques de la fibre. Connaissant B on peut calculer L_{max} à une fréquence donnée ou f_{max} à une longueur donnée.

D'après l'énoncé, une impulsion $\equiv$ un bit.

donc $100 \text{ Mbits} \cdot \text{s}^{-1} \Rightarrow 100 \cdot 10^6 \text{ bits} \cdot \text{s}^{-1}$
 $\Rightarrow 100 \cdot 10^6 \text{ impulsions} \cdot \text{s}^{-1}$

donc $f = 1 \cdot 10^8 \text{ Hz}$.

alors $L_{\text{max}} = \frac{c}{n_c \Delta} \times \frac{1}{f}$

$\Rightarrow \boxed{L_{\text{max}} = \frac{c}{n_c \Delta} \times \frac{2}{1 - \left(\frac{n_g}{n_c}\right)^2}}$

A.N. $L_{\text{max}} = 201 \text{ m}$