TD 8 : CIRCUITS LINÉAIRES DU 1er ORDRE
CORRECTION

EXERCICE 1. Voir cours

EXERCICE 2

1. $u = Ri$ et $i = C\dfrac{du_C}{dt}$

donc $[R] = \dfrac{[U]}{I}$ et $[C] = \dfrac{IT}{[U]}$

et donc $[RC] = \dfrac{[U]}{I} \times \dfrac{IT}{[U]} \Rightarrow \boxed{[RC] = T}$

2. $u = Ri$ et $u = L\dfrac{di}{dt}$

$\Rightarrow [R] = \dfrac{[U]}{I}$ et $[L] = \dfrac{[U]T}{I}$

et donc $\left[\dfrac{L}{R}\right] = \dfrac{[U]T}{I} \times \dfrac{I}{[U]} \Rightarrow \boxed{\left[\dfrac{L}{R}\right] = T}$

EXERCICE 3

1. $\dfrac{du}{dt} + \dfrac{1}{\tau}u = 0 \Rightarrow u(t) = A\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$

$u(0^+) = E \Rightarrow A = E \Rightarrow \boxed{u(t) = E\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)}$

2. $5\dfrac{du}{dt} + \dfrac{1}{RC}u = 0 \Rightarrow \dfrac{du}{dt} + \dfrac{1}{5RC}u = 0$

posons $\tau = 5RC$
alors
$u(t) = A\exp(-t/\tau)$ avec $A = E$

$\Rightarrow \boxed{u(t) = E\exp\left(-\dfrac{t}{5RC}\right)}$

3. $\dfrac{di}{dt} + \dfrac{C_1 + C_2}{C_1C_2(R_1+R_2)}i = 0$ posons $\tau = \dfrac{(R_1+R_2)C_1C_2}{C_1+C_2}$

alors $\dfrac{di}{dt} + \dfrac{1}{\tau}i = 0 \Rightarrow i(t) = A\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$

$i(0^+) = \dfrac{E}{R_1+R_2}$ donc $A = \dfrac{E}{R_1+R_2}$ et donc

$$\boxed{i(t) = \dfrac{E}{R_1+R_2}\exp\left(-\dfrac{C_1+C_2}{(R_1+R_2)C_1C_2} \times t\right)}$$

4. $\dfrac{du}{dt} + \dfrac{1}{C(R_1+R_2)}u = \dfrac{u_0}{(R_1+R_2)C}$

posons $\tau = C(R_1+R_2)$ alors $\dfrac{du}{dt} + \dfrac{1}{\tau}u = \dfrac{u_0}{\tau}$

donc $u(t) = A\exp(-t/\tau) +$ sol. particulière.

i, $u = u_0$ est une solution particulière

$\Rightarrow u(t) = A\exp(-t/\tau) + u_0$

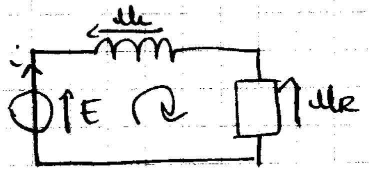
or $u(0^+) = E$ donc $A + u_0 = E$

donc

$$\boxed{u(t) = (E - u_0)\exp\left(-\frac{t}{(R_1+R_2)C}\right) + u_0}$$

EXERCICE 4

Soit un circuit RL série



on a $E = u_L + u_R$

$$\Rightarrow \quad E = L\frac{di}{dt} + u_R$$

or $u_R = Ri$ donc $i = \frac{u_R}{R}$

et donc

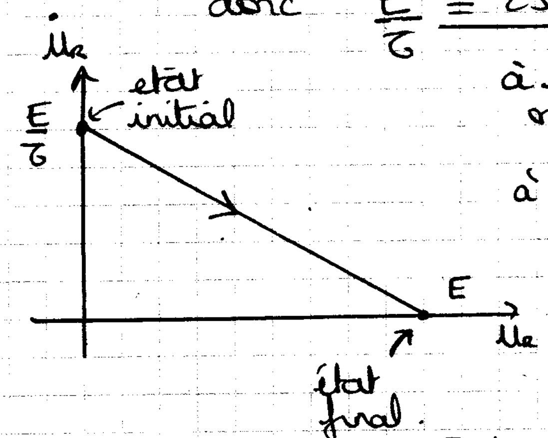
$$E = \frac{L}{R}\frac{du_R}{dt} + u_R$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{du_R}{dt} + \frac{1}{\tau}u_R = \frac{E}{\tau}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\tau = \frac{L}{R}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{du_R}{dt} = -\frac{1}{\tau}u_R + \frac{E}{\tau}$$

→ le portrait de phase est une droite de pente $-\frac{1}{\tau}$ et d'ordonnée à l'origine E.

donc $\underline{\frac{E}{\tau} = 25\ \text{V.ms}^{-1}}$ (lecture graphique)



à $t = 0^+$, $i(0^+) = 0 \Rightarrow u_R(0^+) = 0$.
on peut donc placer l'état initial.

à $t\infty$, $i = \text{cste} \Rightarrow u_R = \text{cste} \Rightarrow \dot{u}_R = 0$.
et donc on peut placer l'état final.

$\dot{u}_R = 0 \Rightarrow u_R = E$

donc $\underline{E = 5\text{V}}$ (lecture graphique)

comme $\frac{E}{\tau} = 25\text{V.ms}^{-1}$ on en déduit $\underline{\tau = 0{,}2\ \text{ms}}$

l'équation en i est : $\frac{dRi}{dt} + \frac{1}{\tau}Ri = \frac{E}{\tau}$

$$\Rightarrow \quad \frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau}i = \frac{E}{R\tau}$$

Solution particulière $i = \frac{E}{R}$

$$\Rightarrow \quad i(t) = A\exp(-t/\tau) + \frac{E}{R}$$

$i(0^+) = i(0^-) = 0 \quad \Rightarrow \quad i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - \exp(-t/\tau)\right)$

$i_\infty = \frac{E}{R}$ donc $\frac{E}{R} = 10\,mA$ (lecture graphique).

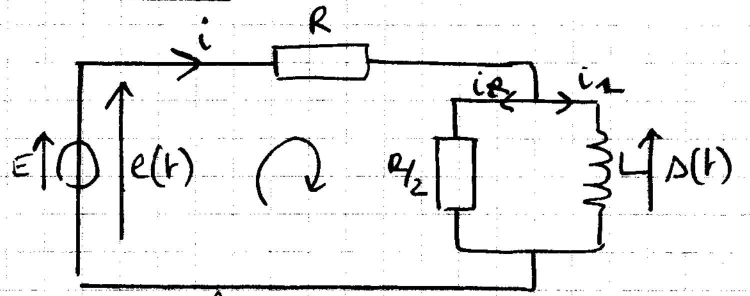
donc

$$R = \frac{5}{10 \cdot 10^{-3}} = 500\,\Omega \qquad \underline{R = 500\,\Omega}$$

et $\tau = \frac{L}{R} \Rightarrow L = \tau R \Rightarrow$ A.N. $L = 0{,}2 \cdot 10^{-3} \times 500$

$$\Rightarrow \quad \underline{L = 0{,}1\,H = 100\,mH}$$

EXERCICE 5



1. Continuité de i dans la bobine :

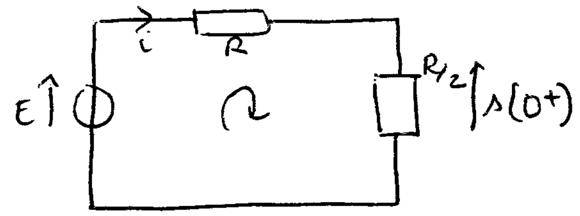
$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$

déjà, $\boxed{i(0^-) = 0}$ car K * est ouvert à $t = 0^-$

loi des noeuds à $t = 0^+$ $\quad i(0^+) = \underbrace{i_L(0^+)}_{=0} + i_R(0^+)$

donc $i(0^+) = i_R(0^+)$

Donc R et R/2 sont en série : Le schéma est donc équivalent, à $t = 0^+$:



D'après le PDT :

$$s(0^+) = \frac{R/2}{R + R/2} E$$

soit $\boxed{s(0^+) = \frac{E}{3}}$

De plus, $s(0^-) = \frac{R}{2} i(0^-) = 0$ (d'après *) donc $\boxed{s(0^-) = 0}$

2. D'après la question précédente : $i(0^-) = 0$

$i(0^+) = i_R(0^+)$

or $s(0^+) = \frac{R}{2} i_R(0^+)$ donc $\boxed{i_R(0^+) = \frac{2E}{3R} = i(0^+)}$

3. qd $t \to +\infty$, $\equiv$ (car i = cste)

donc

$$\boxed{s(t) \underset{t \to +\infty}{=} 0}$$

4. Loi des mailles : $E - Ri - s(t) = 0$

or $i = i_R + i_L$ avec $i_R = \frac{s(t)}{R/2} = \frac{2s(t)}{R}$

et

$$L \frac{di_L}{dt} = s(t)$$

$$\Rightarrow \quad E = R i_R + R i_L + s(t)$$

on dérive par rapport au temps :

$$0 = R \frac{di_R}{dt} + R \frac{di_L}{dt} + \frac{ds}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = R\left(\frac{d\left(\frac{2s(t)}{R}\right)}{dt}\right) + R\,\frac{s(t)}{L} + \frac{ds(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = 2\,\dot{s}(t) + \frac{R}{L}\,s(t) + \dot{s}(t)$$

et donc

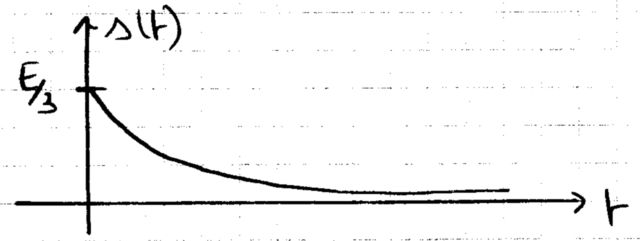
$$\boxed{\dot{s}(t) + \frac{R}{3L}\,s(t) = 0}$$

5. $s(t) = A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ avec $\tau = \frac{3L}{R}$.

$s(0^+) = \frac{E}{3}$ donc

$$\boxed{s(t) = \frac{E}{3}\exp\left(-\frac{Rt}{3L}\right)}$$

6.

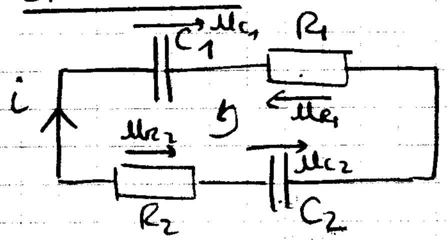


7. $s(T) = \frac{E/3}{10} \Rightarrow \frac{E}{3}\exp\left(-\frac{R}{3L}T\right) = \frac{E/3}{10}$

$$\Rightarrow \exp\left(-\frac{RT}{3L}\right) = \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{RT}{3L} = \ln(10)$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{3L}{R}\ln(10)}$$ homogène.

EXERCICE 6*



1. Le condensateur C_1 étant chargé à $t=0^-$, il peut être traité en convention générateur.

donc $$\boxed{i = -C\,\frac{du_{C_1}}{dt}}$$

2. Continuité de u pour un condensateur donc

$$\boxed{\begin{array}{l} u_{C_1}(0^+) = u_{C_1}(0^-) = V_0 \\ u_{C_2}(0^+) = u_{C_2}(0^-) = 0 \end{array}}$$

Loi des mailles à $t=0^+$: $u_{C_1}(0^+) = u_{R_1}(0^+) + u_{R_2}(0^+) + \underbrace{u_{C_2}(0^+)}_{=0}$

$$\Rightarrow V_0 = (R_1 + R_2)\,i(0^+)$$

donc

$$\boxed{i(0^+) = \frac{V_0}{R_1+R_2}}$$

3. Loi des mailles à t qcq :

$$u_{C_1} = u_{R_1} + u_{R_2} + u_{C_2}$$

pour faire apparaître i, dérivons la loi des mailles :

$$\frac{du_{C_1}}{dt} = \frac{du_{R_1}}{dt} + \frac{du_{R_2}}{dt} + \frac{du_{C_2}}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{-i}{C_1} = (R_1+R_2)\frac{di}{dt} + \frac{i}{C_2}$$

$$\Rightarrow (R_1+R_2)\frac{di}{dt} + i\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{di}{dt} + \frac{C_1+C_2}{C_1C_2(R_1+R_2)}\, i = 0}$$

remarque : on pouvait résoudre directement en disant que

R_1 R_2 $\equiv$ R_1+R_2

et C_1 C_2 $\equiv$ C_{eq} $\quad \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$

4. $i(0^+) = \frac{V_0}{R_1+R_2}$ Equation résolue exercice 3 qu. 3.

$$\boxed{i(t) = \frac{V_0}{R_1+R_2}\exp\left(-\frac{C_1+C_2}{(R_1+R_2)C_1C_2}\,t\right)}$$ Posons $\tau = \frac{(R_1+R_2)C_1C_2}{C_1+C_2}$.

5. on a $i = -C_1\frac{du_{C_1}}{dt} \Rightarrow \frac{du_{C_1}}{dt} = -\frac{i}{C_1}$

Donc

$$u_{C_1}(t) = -\frac{1}{C_1}\times\left(-\tau\frac{V_0}{R_1+R_2}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) + cste = +\frac{C_2V_0}{C_1+C_2}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + cste$$

or $u_{C_1}(0^+) = V_0$ donc $V_0 = +\frac{C_2V_0}{C_1+C_2}\times 1 + cste \Rightarrow cste = V_0\left(1-\frac{C_2}{C_1+C_2}\right) = \frac{C_1V_0}{C_1+C_2}$

donc

$$\boxed{u_{C_1}(t) = \frac{C_2V_0}{C_1+C_2}\exp(-t/\tau) + \frac{C_1V_0}{C_1+C_2} \quad \text{avec } \tau = \frac{C_1C_2(R_1+R_2)}{C_1+C_2}}$$

De plus $i(t) = C_2\frac{du_{C_2}}{dt}$ = + donc $\frac{du_{C_2}}{dt} = +\frac{i}{C_2}$

Donc

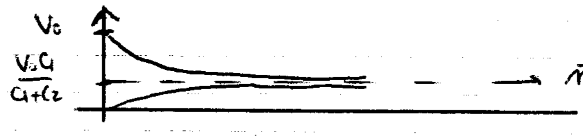
$$u_{C_2}(t) = +\frac{1}{C_2}\times\left(-\tau\frac{V_0}{R_1+R_2}\exp(-t/\tau)\right) + cste = -\frac{C_1V_0}{C_1+C_2}\exp(-t/\tau) + cste$$

or $u_{C_2}(0+) = 0$ donc $cste - \frac{C_1V_0}{C_1+C_2}\times 1 = 0 \Rightarrow cste = \frac{C_1V_0}{C_1+C_2}$

donc

$$\boxed{u_{C_2}(t) = \frac{C_1V_0}{C_1+C_2}\left(1-\exp(-t/\tau)\right) \quad \text{avec } \tau = \frac{C_1C_2(R_1+R_2)}{C_1+C_2}}$$

Allure :



→ m̄ limite en l'∞.

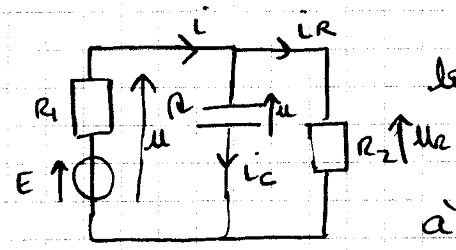
EXERCICE 7

1. à $t<0$, K étant ouvert depuis longtemps, on est en régime continu donc $\rightarrow$ $\boxed{\begin{cases} i(0^-)=0 \\ i_c(0^-)=0 \\ u(0^-)=E-0 \end{cases}}$

comme K est ouvert $\boxed{i_R(0^-)=0}$.

2. $u = u_C \rightarrow$ continue donc $\boxed{u(0^+) = E}$

de plus.



loi des mailles $E - R_1 i - u = 0$

à $t = 0^+$

$E - R_1 i(0^+) - u(0^+) = 0 \Rightarrow \boxed{i(0^+)=0}$

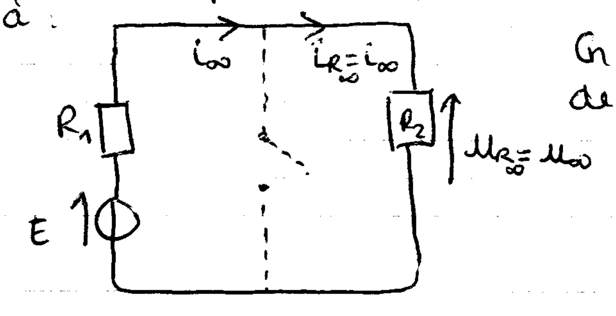
de plus $i_R(0^+) = \dfrac{u_R(0^+)}{R_2}$ or $u_{R_2} = u$

donc $\boxed{i_R(0^+) = \dfrac{E}{R_2}}$

et enfin $i_c(0^+) = i(0^+) - i_R(0^+)$
$= 0 - \dfrac{E}{R_2} \Rightarrow \boxed{i_c(0^+) = -\dfrac{E}{R_2}}$

3. $u_\infty = \text{cste} \Rightarrow \dfrac{du_\infty}{dt} = 0 \Rightarrow i_{c\infty} = 0$
et donc $i_\infty = i_{R\infty}$

Donc, losque $t \rightarrow \infty$, R_1 et R_2 sont en série et le schéma est équivalent à :



On peut donc appliquer le pont diviseur de tension :

$\boxed{u_\infty = \dfrac{R_2}{R_1+R_2} E}$

4. On a $\begin{cases} E = R_1 i + u & (1) \text{ LDM} \\ u = R_2 i_R & (2) \text{ Ohm} \\ i = i_R + i_c & (3) \text{ LDN} \\ i_c = C\dfrac{du}{dt} & (4) \text{ rel } i/u \text{ pr } C. \end{cases}$

l'equa diff en u s'obtient en eliminant toutes les inconnues autres que u.

$(1) \Rightarrow E = u + R_1 i \Rightarrow i = \dfrac{E-u}{R_1}$

$(2) \Rightarrow i_R = \dfrac{u}{R_2}$ donc

$(4) \Rightarrow i_c = C\dfrac{du}{dt}$

$i = i_R + i_C$ donne

$$\frac{E-u}{R_1} = \frac{u}{R_2} + C\frac{du}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dt} + \frac{u}{R_2C} + \frac{u}{R_1C} = \frac{E}{R_1C}$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dt} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\frac{1}{C}u = \frac{E}{R_1C}$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dt} + \frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}u = \frac{E}{R_1C}$$

en posant $\boxed{\tau = \frac{R_1R_2C}{R_1+R_2}}$ on obtient :

$$\boxed{\frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau}u = \frac{E}{\tau} \times \frac{R_2}{R_1+R_2}}$$

5. A la réouverture de K, on a un "simple" circuit R_1C série :

donc $\boxed{\tau' = R_1C}$

6. $\boxed{\frac{\tau'}{\tau} = \frac{R_1+R_2}{R_2} = 1 + \frac{R_1}{R_2}}$

$\frac{\tau'}{\tau} = \frac{10}{2,0} = 5$ donc $\boxed{\frac{R_1}{R_2} = 4,0}$