

Semaine de colles n°3 du 02/10/23 au 06/10/23

• **Généralités sur les fonctions réelles**

I - Généralités sur les fonctions réelles

- Définition, image d'une fonction.
- Représentation graphique des fonctions associées et application à la recherche de symétries.
- Opérations sur les fonctions : multiplication par un réel, somme, produit et composition.

II - Propriétés globales

- Périodicité, parité
- Fonctions monotones et strictement monotones, fonctions majorées/minorées/bornées.

III - Régularité

- Continuité, théorème des valeurs intermédiaires, prolongement par continuité en un point.
- Dérivabilité, variations et dérivées, dérivée seconde.

IV - Propriétés de la courbe représentative

- Tangentes, asymptotes, méthode d'étude des branches infinies.
- Fonctions convexes, fonctions concaves et caractérisations.

V - Bilan : comment étudier une fonction à valeurs réelles

NOUVEAU COURS :

• **Généralités sur les fonctions réelles**

VI - Fonction bijective

- Fonction bijective, bijection réciproque et dérivation de la bijection réciproque.

• **Fonctions usuelles : Rappels de Terminale et compléments**

I - Fonctions exponentielle, logarithme népérien

- Inégalités à connaître : $\forall x \in \mathbb{R}, x + 1 \leq e^x$ et $\forall x > 0, \ln x \leq x - 1$

II - Fonctions puissances

- Définition de a^b avec a et b réels tel que $a > 0$, propriétés de calcul.
- Étude complète des fonctions puissances $x \mapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ variations et prolongements suivant les valeurs de α .
- Fonctions racine n -ième.
- Méthode d'étude de fonctions de la forme $x \mapsto u(x)^{v(x)}$.
- Croissances comparées.

III - Fonctions circulaires

- Rappels : fonctions cosinus et sinus

- Inégalités à connaître : $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leq |x|$ et $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$ (*)

- Les fonctions cosinus et sinus sont indéfiniment dérivables sur \mathbb{R} , expression des dérivées n -ième. (*)
- Fonction tangente : Étude complète avec ensemble de définition, dérivée, variations, limites, courbe représentative.

Une question de cours pourra être de réaliser l'étude de la fonction tangente. (*)

- Formules d'addition, de linéarisation et de duplication.

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 4 : Nombres complexes.

Déroulement d'une colle

1. Étude la continuité et/ou dérivabilité d'une fonction composée (avec calcul de la dérivée), sur un exemple. Rédaction parfaite exigée !
2. Une question de cours : méthode ou démonstration signalées par (*).
3. Un exercice identique ou très proche d'un exercice « à savoir refaire » (cf. liste ci-dessous).
4. Éventuellement, un exercice plus compliqué s'il reste du temps.

Un cours non connu entraîne une note < 10.

Exercices Chap. 2Exercice fait dans le cours :

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 2}$.

- Montrer que f est une bijection de \mathbb{R} sur un intervalle à déterminer.
- Déterminer alors la bijection réciproque de f .

Exercice 7 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

- Déterminer son ensemble de définition et étudier sa parité.
- Sans calcul de dérivée, donner les variations de f sur son ensemble de définition.

Exercice 9 :

Proposer un domaine de définition et un domaine d'étude pour les fonctions définies par : **b.** $g(t) = \frac{1}{\cos(t) + \cos(2t)}$

Exercice 11 :

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Ind. On pourra étudier la périodicité de $f: x \mapsto \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor$.

Exercice 18 : Comportement asymptotique.

Préciser le comportement asymptotique, en $+\infty$ et/ou $-\infty$, des fonctions dont on donne l'expression ci-dessous :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$

Exercice 20 : Continuité.

Étudier la continuité sur \mathbb{R} de la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$.

Exercice 21 : Continuité et dérivabilité.

Soit f définie sur \mathbb{R}^+ par : $f(x) = \begin{cases} \alpha & \text{si } x = 0 \\ e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Déterminer le réel α pour que f soit continue sur \mathbb{R}^+ .
- Étudier la dérivabilité de f sur son ensemble de définition.

Exercice 24 : Tangentes particulières.

Soit f une fonction définie par : $f(x) = \sqrt{x^3(2-x)}$.

Déterminer l'ensemble de définition D_f de f puis les tangentes à la courbe représentative de f aux bornes de D_f .

Exercice 31 :

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R}^{*+} par : $\forall x \in \mathbb{R}^{*+}, f(x) = x^2 + \ln x + 1$.

- Montrer que f est une bijection de \mathbb{R}^{*+} sur un ensemble J à déterminer.
- Donner le tableau de variations de f^{-1} .
- Montrer que f^{-1} est dérivable sur J et exprimer sa dérivée en fonction de f^{-1} . *On ne demande pas d'explicitier f^{-1} .*
- Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f^{-1} au point d'abscisse 2.

Exercices Chap. 3Exercice 1 :

5. Montrer que : $\forall x \in]0, 1[, x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}$.

Exercice 2 : Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

a. $\ln|x-1| + \ln|x-3| = \ln|3x^2 - 4x + 1|$

c. $2^{x+4} + 3^x = 2^{x+2} + 3^{x+2}$

e. $3^x + 4^x = 5^x$

f. $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$

Exercice 6 :

1. Étudier la fonction : $f: x \mapsto x + \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$

Exercice 8 :

1. Étudier la fonction : $f: x \mapsto x^x$

Exercice 10 : Équations et inéquations trigonométriques.

Résoudre dans \mathbb{R} les équations et inéquations suivantes :

2. $\tan x \tan 2x = 1$

6. $\tan \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = -1$

7. $\tan x \geq 1$