Semaine de colles n°2 du 23/09/24 au 27/09/24

• Exercices de révisions de terminale

Cf feuille d'exercices

• Ensembles, logique et raisonnement

I à III - Éléments de logique

- Connecteurs logiques : disjonction ou conjonction de deux assertions, négation d'une assertion
- Implication, implication réciproque et contraposée, équivalence.

IV - Ensembles

- Parties, inclusion, réunion, intersection, complémentaire, différence de deux ensembles, produit cartésien.

V - Les quantificateurs

VI - Divers types de raisonnement

Récurrence simple, démontrer une implication (raisonnement direct ou contraposée), démontrer une équivalence (raisonnement direct ou double implication), raisonnement par l'absurde, raisonnement par analyse/synthèse. Ce dernier type de raisonnement a pour l'instant été très peu utilisé.

• Ordre sur $\mathbb{R}$ et inégalités

I – Les ensembles de nombres

II – Opérations dans $\mathbb{R}$

- Propriétés de l'addition et de la multiplication de réels.

III – Comparaison dans $\mathbb{R}$

- Propriétés de la comparaison dans $\mathbb{R}$, ordre total.
- Règles pour transformer une inégalité.

⚠ • Quand on multiplie (ou divise) une inégalité par une quantité, **ON ÉTUDIE D'ABORD SON SIGNE.**
• On ajoute des inégalités de même sens mais **ON NE LES SOUSTRAIT JAMAIS.**
• On multiplie des inégalités de même sens **QUE SI ELLES PORTENT SUR DES RÉELS POSITIFS.**

- Méthode pour démontrer une inégalité : utilisation du sens de variations d'une fonction, se ramener à une étude de signe, réaliser un tableau de signes, réaliser une étude de fonction, etc…
- Vocabulaire lié à l'ordre : Majorant/minorant, plus grand/petit élément, borne sup. /borne inf.
- Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure
  Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

IV – Intervalles de $\mathbb{R}$

- Définition, classification.

V – Valeur absolue

- Définition, propriétés de calcul, interprétation en termes de distance.
- Lien avec les intervalles : $|x-a|=r \Leftrightarrow \ -r=x-a=r \ \Leftrightarrow \ x=a-r$ ou $x=a+r$

$$|x-a|\le r \Leftrightarrow \ -r\le x-a\le r \ \Leftrightarrow \ a-r\le x\le a+r \ \Leftrightarrow x\in [\,a-r, a+r\,].$$

$$|x-a|\ge r \Leftrightarrow \ x-a\le -r \text{ ou } x-a\ge r \ \Leftrightarrow \ x\in\,]-\infty, a-r] \cup [a+r, +\infty[$$

Savoir interpréter en termes de distances, faire un schéma.
Une question de cours pourra être la résolution d'équations/inéquations simples avec des valeurs absolues. **(*)**

- Inégalité triangulaire avec cas d'égalité **(*) L'interrogateur est libre de demander toute la démonstration ou seulement une partie ; mais il faut savoir citer le théorème complet.**

Et généralisation : Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a : $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i|$.

VI – Partie entière et approximations décimales d'un réel

- Définition, notation $\lfloor x \rfloor$, représentation graphique, propriétés.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{Z}, \lfloor x+p \rfloor = \lfloor x \rfloor + p$ **(*)**
- Approximations décimales à 10^{-n} près d'un réel.

On peut approcher un réel quelconque d'aussi près que l'on veut par des décimaux

NOUVEAU COURS :

• Généralités sur les fonctions réelles

I – Généralités sur les fonctions réelles

- Définition, image d'une fonction.
- Représentation graphique des fonctions associées et application à la recherche de symétries.
- Opérations sur les fonctions : multiplication par un réel, somme, produit et composition.

II – Propriétés globales

- Périodicité, parité
- Fonctions monotones et strictement monotones, fonctions majorées/minorées/bornées.

III – Régularité

- Continuité, théorème des valeurs intermédiaires, prolongement par continuité en un point.
- Dérivabilité, variations et dérivées, dérivée seconde.

Cette semaine une question de cours pourra être d'étudier la continuité/dérivabilité d'une fonction composée (avec calcul de la dérivée). Rédaction parfaite exigée ! **(*)**

IV – Propriétés de la courbe représentative

- Tangentes, asymptotes, méthode d'étude des branches infinies.
- Fonctions convexes, fonctions concaves et caractérisations.

V – Bilan : comment étudier une fonction à valeurs réelles

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 3 : Généralités sur les fonctions usuelles (fin) + Fonctions usuelles.

Déroulement d'une colle

1. Révisions : Un ou deux calculs inspirés de la fiche de révisions
2. Écrire sous forme symbolique une définition des chapitres au programme et/ou sa négation
3. Une question de cours : méthode ou démonstration signalées par **(*)**
4. Un exercice identique ou très proche d'un exercice « à savoir refaire » (cf. liste ci-dessous),
5. Éventuellement, un exercice plus compliqué s'il reste du temps.

Une question de cours (points 1 à 3) non connue entraine une note < 10.
Si les points 1 à 4 sont réussis, la note sera ≥ 13.

Semaine de colles n°2 du 23/09/24 au 27/09/24 - Exercices à savoir refaire

Exercices Chap. 1

Exercice 2 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes : **b.** $0 < \dfrac{2-x}{1-x} < 1$

Exercice 3 :
Démontrer les inégalités suivantes :

a. $\forall x > -1, \ln(1+x) \le x$ **b.** $\forall x \in \mathbb{R}, x+1 \le e^x$ **c.** $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \ \frac{2}{\pi}x \le \sin x \le x$

Rq. 2 méthodes vues en TD : utilisation de la convexité et par étude de fonction.
Rq. Ces inégalités sont à connaitre.

Exercice 4 :

2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) > \dfrac{1}{1+x}$.

Exercice 5 : *Inégalités entre les moyennes.*

Soit a et b deux réels strictement positifs. On pose : $m = \dfrac{a+b}{2}$, $g = \sqrt{ab}$ et $h = \dfrac{2ab}{a+b}$. Montrer que : $h \le g \le m$.

Exercice 11 :
1. a. Montrer que : $\forall x \in [0, 1], \forall k \in \mathbb{N}, 0 \le x^k(1-x)^k \le x^k$

b. En déduire que : $\forall x \in]0, 1[, \forall n \in \mathbb{N}, \ 0 \le \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k(1-x)^k \le \dfrac{1}{1-x}$

Exercice 14 :
Soit A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$.
1. On considère A + B = { $a + b, a \in$ A, $b \in$ B}. Montrer que A + B est majorée et que l'on a : sup(A + B) = sup A + sup B.

Exercice 17 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes : **f.** $\left|\dfrac{3x-6}{4}\right| \ge 2$ **g.** $|2x-4| \le |x-1|$

Exercice 21 :
Représenter graphiquement sur [– 2, 2], les fonctions suivantes :
$f_1 : x \longmapsto \lfloor 2x \rfloor$ $f_2 : x \longmapsto \lfloor x^2 \rfloor$

Exercice 22 :

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \left\lfloor \left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right)^2 \right\rfloor = 4n+1$.

Exercice 26 :

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \dfrac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor$

Exercices Chap. 2

Exercice 1 :
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Écrire à l'aide des quantificateurs :
1. f est paire. **2.** f est majorée.
3. f admet un maximum. **4.** f est bornée.
5. f n'est pas paire. **6.** f n'est pas majorée.
7. f n'est pas bornée.

Exercice 7 :
Soit f la fonction définie par : $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.
1. Déterminer son ensemble de définition et étudier sa parité.
2. Sans calcul de dérivée, donner les variations de f sur son ensemble de définition.

Exercice 9 :

Proposer un domaine de définition et un domaine d'étude pour les fonctions définies par : **b.** $g(t) = \dfrac{1}{\cos(t) + \cos(2t)}$

Exercice 11 :

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \ \left\lfloor \dfrac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{x+1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

__Ind.__ On pourra étudier la périodicité de $f : x \longmapsto \left\lfloor \dfrac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{x+1}{2} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor$.

Exercice 20 : *Continuité.*
Étudier la continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$.

Exercice 21 : *Continuité et dérivabilité.*

Soit f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \begin{cases} \alpha & \text{si } x = 0 \\ e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer le réel α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^+$.
2. Étudier la dérivabilité de f sur son ensemble de définition.

Exercice 24 : *Tangentes particulières.*
Soit f une fonction définie par : $f(x) = \sqrt{x^3(2-x)}$.
Déterminer l'ensemble de définition D_f de f puis les tangentes à la courbe représentative de f aux bornes de D_f.