

Semaine de colles n°4 du 07/10/24 au 11/10/24

• Généralités sur les fonctions réelles

I - Généralités sur les fonctions réelles

II - Propriétés globales

III - Régularité

IV - Propriétés de la courbe représentative

V - Bilan : comment étudier une fonction à valeurs réelles

VI - Fonction bijective

➔ Fonction bijective, bijection réciproque et dérivation de la bijection réciproque.

• Fonctions usuelles : Rappels de Terminale et compléments

I - Fonctions exponentielle, logarithme népérien

➔ Inégalités à connaître : $\forall x \in \mathbb{R}, x+1 \leq e^x$ et $\forall x > 0, \ln x \leq x-1$

II - Fonctions puissances

- ➔ Définition de a^b avec a et b réels tel que $a > 0$, propriétés de calcul.
- ➔ Étude complète des fonctions puissances $x \mapsto x^a = e^{a \ln x}$ variations et prolongements suivant les valeurs de a
- ➔ Fonctions racine n -ième.
- ➔ Méthode d'étude de fonctions de la forme $x \mapsto u(x)^{v(x)}$.
- ➔ Croissances comparées.

III - Fonctions circulaires

➔ Rappels : fonctions cosinus et sinus

➔ Inégalités à connaître : $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leq |x|$ et $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$ (*)

- ➔ Les fonctions cosinus et sinus sont indéfiniment dérivables sur \mathbb{R} , expression des dérivées n -ième.
- ➔ Fonction tangente : Étude complète avec ensemble de définition, dérivée, variations, limites, courbe représentative.

Une question de cours pourra être de réaliser l'étude de la fonction tangente. (*)

➔ Formules d'addition, de linéarisation et de duplication.

NOUVEAU COURS :

• Les nombres complexes

I - Ensemble des nombres complexes \mathbb{C}

- ➔ Définition, unicité de la forme algébrique d'un complexe, parties réelles et imaginaires.
- ➔ Addition et multiplication : propriétés.
- ➔ Conjugaison, propriétés de calcul, expressions de $\operatorname{Re}(z)$ et $\operatorname{Im}(z)$, caractérisation des éléments de \mathbb{R} et $i\mathbb{R}$.
- ➔ Module, propriétés de calcul.
- ➔ Inégalité triangulaire et cas d'égalité. (*)

II - Forme trigonométrique

- ➔ Ensemble \mathbb{U} des nombres complexes de module 1.
 - ➔ Notation $e^{i\theta}$, propriétés de calcul, formules de De Moivre et d'Euler.
 - ➔ Argument d'un complexe de module 1, d'un complexe non nul, propriétés de calcul.
 - ➔ Caractérisation des réels et des imaginaires purs à l'aide des arguments.
 - ➔ Une méthode à connaître : factorisation par l'angle moitié.
- Ex. Module et arguments de $1 + e^{it}$ ou $1 - e^{it}$, à discuter suivant les valeurs de $t \in \mathbb{R}$ (*)
- ➔ Exponentielle complexe et propriétés.
- Résolution d'équations de la forme $e^z = a$.

III - Applications à la trigonométrie

- ➔ Formules de trigonométrie usuelles : linéarisation, factorisation.
- ➔ Transformation de $a \cos x + b \sin x$ et résolution d'équations de la forme : $a \cos x + b \sin x = c$.

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 4 : Nombres complexes (début)

Déroulement d'une colle

1. Une formule de trigonométrie A CONNAITRE SANS HESITATION ! cf. formulaire
2. Un calcul parmi :
 - Justification d'une formule de trigonométrie
 - Équation de la forme $e^z = a$ ou $a \cos x + b \sin x = c$

Vous devez être efficaces dans vos calculs.

3. Une question de cours : méthode ou démonstration signalées par (*).
4. Exercice(s) : On commencera par un exercice identique ou très proche d'un exercice « à savoir refaire » (cf. liste ci-dessous).

Un cours non connu entraine une note < 10.

Exercices Chap. 2Exercice fait dans le cours :

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 2}$.

- Montrer que f est une bijection de \mathbb{R} sur un intervalle à déterminer.
- Déterminer alors la bijection réciproque de f .

Exercice 31 :

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R}^{+*} par : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f(x) = x^2 + \ln x + 1$.

- Montrer que f est une bijection de \mathbb{R}^{+*} sur un ensemble J à déterminer.
- Donner le tableau de variations de f^{-1} .
- Montrer que f^{-1} est dérivable sur J et exprimer sa dérivée en fonction de f^{-1} . *On ne demande pas d'expliquer f^{-1} .*
- Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f^{-1} au point d'abscisse 2.

Exercices Chap. 3Exercice 1 :

5. Montrer que : $\forall x \in]0, 1[, x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}$.

Exercice 2 : Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

a. $\ln|x-1| + \ln|x-3| = \ln|3x^2 - 4x + 1|$ e. $2^{x+4} + 3^x = 2^{x+2} + 3^{x+2}$ e. $3^x + 4^x = 5^x$ f. $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x}$

Exercice 6 :

1. Étudier la fonction : $f: x \mapsto x + \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$

Exercice 8 :

1. Étudier la fonction : $f: x \mapsto x^x$

Exercice 10 : *Équations et inéquations trigonométriques.*

Résoudre dans \mathbb{R} les équations et inéquations suivantes :

2. $\tan x \tan 2x = 1$ 6. $\tan \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = -1$ 7. $\tan x \geq 1$

Exercice 14 :

Déterminer toutes les fonctions définies sur \mathbb{R}^* et vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$.

Exercices Chap. 4Exercice 7 :

Mettre sous forme exponentielle les complexes suivants. On précisera leur module et leurs arguments.

1. $z_1 = \frac{(1+i\sqrt{3})^7}{(1+i)^5}$ 4. $z_4 = -2ie^{i\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$ 5. $z_5 = (1-i)^n + (1+i)^n, n \in \mathbb{N}$ 8. $z_8 = \frac{e^{ix} - 1}{e^{ix} + 1}, x \in]-\pi, \pi[$

Exercice 9 :

Soit z un complexe appartenant à $\mathbb{U} \setminus \{1\}$. Prouver que $\frac{z+1}{z-1}$ est un imaginaire pur.

Exercice 10 :

2. Soit u appartenant à $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $z \in \mathbb{C}$. Prouver que : $\frac{z-u\bar{z}}{1-u} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow u \in \mathbb{U}$ ou $z \in \mathbb{R}$.

Exercice 15 : Soit u et v deux complexes.

Montrer que : 1. $|u| + |v| \leq |u+v| + |u-v|$
2. *Identité du parallélogramme.* $|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$

Exercice 25 : *Équations avec des modules.*

- Trouver l'ensemble des complexes z tels que : $|z+1| = |z| + 1$.
- Trouver l'ensemble des complexes z tels que : $|z| = |1-z| = \frac{1}{|z|}$.

Exercice 26 : *Équations avec des arguments.*

1. Trouver l'ensemble des complexes z tels que : $2 \arg(z+i) \equiv \arg(z) + \arg(i) \pmod{\pi}$.

Exercice 27 :

2. Trouver tous les complexes z tels que : $z^3 = -16 \bar{z}^7$.