

Semaine de colles n°4 du 07/10/24 au 11/10/24

• Généralités sur les fonctions réelles

I - Généralités sur les fonctions réelles

II - Propriétés globales

III - Régularité

IV - Propriétés de la courbe représentative

V - Bilan : comment étudier une fonction à valeurs réelles

VI - Fonction bijective

➔ Fonction bijective, bijection réciproque et dérivation de la bijection réciproque.

• Fonctions usuelles : Rappels de Terminale et compléments

I - Fonctions exponentielle, logarithme népérien

➔ Inégalités à connaître :  $\forall x \in \mathbb{R}, x+1 \leq e^x$  et  $\forall x > 0, \ln x \leq x-1$

II - Fonctions puissances

- ➔ Définition de  $a^b$  avec  $a$  et  $b$  réels tel que  $a > 0$ , propriétés de calcul.
- ➔ Étude complète des fonctions puissances  $x \mapsto x^a = e^{a \ln x}$  variations et prolongements suivant les valeurs de  $a$
- ➔ Fonctions racine  $n$ -ième.
- ➔ Méthode d'étude de fonctions de la forme  $x \mapsto u(x)^{v(x)}$ .
- ➔ Croissances comparées.

III - Fonctions circulaires

➔ Rappels : fonctions cosinus et sinus

➔ Inégalités à connaître :  $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leq |x|$  et  $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$  (\*)

- ➔ Les fonctions cosinus et sinus sont indéfiniment dérivables sur  $\mathbb{R}$ , expression des dérivées  $n$ -ième.
- ➔ Fonction tangente : Étude complète avec ensemble de définition, dérivée, variations, limites, courbe représentative.

Une question de cours pourra être de réaliser l'étude de la fonction tangente. (\*)

➔ Formules d'addition, de linéarisation et de duplication.

NOUVEAU COURS :

• Les nombres complexes

I - Ensemble des nombres complexes  $\mathbb{C}$

- ➔ Définition, unicité de la forme algébrique d'un complexe, parties réelles et imaginaires.
- ➔ Addition et multiplication : propriétés.
- ➔ Conjugaison, propriétés de calcul, expressions de  $\operatorname{Re}(z)$  et  $\operatorname{Im}(z)$ , caractérisation des éléments de  $\mathbb{R}$  et  $i\mathbb{R}$ .
- ➔ Module, propriétés de calcul.
- ➔ Inégalité triangulaire et cas d'égalité. (\*)

II - Forme trigonométrique

- ➔ Ensemble  $\mathbb{U}$  des nombres complexes de module 1.
  - ➔ Notation  $e^{i\theta}$ , propriétés de calcul, formules de De Moivre et d'Euler.
  - ➔ Argument d'un complexe de module 1, d'un complexe non nul, propriétés de calcul.
  - ➔ Caractérisation des réels et des imaginaires purs à l'aide des arguments.
  - ➔ Une méthode à connaître : factorisation par l'angle moitié.
- Ex. Module et arguments de  $1 + e^{it}$  ou  $1 - e^{it}$ , à discuter suivant les valeurs de  $t \in \mathbb{R}$  (\*)
- ➔ Exponentielle complexe et propriétés.
- Résolution d'équations de la forme  $e^z = a$ .

III - Applications à la trigonométrie

- ➔ Formules de trigonométrie usuelles : linéarisation, factorisation.
- ➔ Transformation de  $a \cos x + b \sin x$  et résolution d'équations de la forme :  $a \cos x + b \sin x = c$ .

(\*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 4 : Nombres complexes (début)

Déroulement d'une colle

1. Une formule de trigonométrie A CONNAITRE SANS HESITATION ! cf. formulaire
2. Un calcul parmi :
  - Justification d'une formule de trigonométrie
  - Équation de la forme  $e^z = a$  ou  $a \cos x + b \sin x = c$

Vous devez être efficaces dans vos calculs.

3. Une question de cours : méthode ou démonstration signalées par (\*).
4. Exercice(s) : On commencera par un exercice identique ou très proche d'un exercice « à savoir refaire » (cf. liste ci-dessous).

Un cours non connu entraine une note < 10.

Exercices Chap. 2Exercice fait dans le cours :

Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 2}$ .

- Montrer que  $f$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur un intervalle à déterminer.
- Déterminer alors la bijection réciproque de  $f$ .

Exercice 31 :

Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}^{+*}$  par :  $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f(x) = x^2 + \ln x + 1$ .

- Montrer que  $f$  est une bijection de  $\mathbb{R}^{+*}$  sur un ensemble  $J$  à déterminer.
- Donner le tableau de variations de  $f^{-1}$ .
- Montrer que  $f^{-1}$  est dérivable sur  $J$  et exprimer sa dérivée en fonction de  $f^{-1}$ . *On ne demande pas d'expliquer  $f^{-1}$ .*
- Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de  $f^{-1}$  au point d'abscisse 2.

Exercices Chap. 3Exercice 1 :

5. Montrer que :  $\forall x \in ]0, 1[ , x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}$ .

Exercice 2 : Résoudre les équations suivantes, d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  :

a.  $\ln|x-1| + \ln|x-3| = \ln|3x^2 - 4x + 1|$       e.  $2^{x+4} + 3^x = 2^{x+2} + 3^{x+2}$       e.  $3^x + 4^x = 5^x$       f.  $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x}$

Exercice 6 :

1. Étudier la fonction :  $f: x \mapsto x + \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$

Exercice 8 :

1. Étudier la fonction :  $f: x \mapsto x^x$

Exercice 10 : *Équations et inéquations trigonométriques.*

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations et inéquations suivantes :

2.  $\tan x \tan 2x = 1$       6.  $\tan \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right) = -1$       7.  $\tan x \geq 1$

Exercice 14 :

Déterminer toutes les fonctions définies sur  $\mathbb{R}^*$  et vérifiant :  $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$ .

Exercices Chap. 4Exercice 7 :

Mettre sous forme exponentielle les complexes suivants. On précisera leur module et leurs arguments.

1.  $z_1 = \frac{(1+i\sqrt{3})^7}{(1+i)^5}$       4.  $z_4 = -2ie^{i\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$       5.  $z_5 = (1-i)^n + (1+i)^n, n \in \mathbb{N}$       8.  $z_8 = \frac{e^{ix} - 1}{e^{ix} + 1}, x \in ]-\pi, \pi[$

Exercice 9 :

Soit  $z$  un complexe appartenant à  $\mathbb{U} \setminus \{1\}$ . Prouver que  $\frac{z+1}{z-1}$  est un imaginaire pur.

Exercice 10 :

2. Soit  $u$  appartenant à  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$  et  $z \in \mathbb{C}$ . Prouver que :  $\frac{z-u\bar{z}}{1-u} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow u \in \mathbb{U}$  ou  $z \in \mathbb{R}$ .

Exercice 15 : Soit  $u$  et  $v$  deux complexes.

Montrer que : 1.  $|u| + |v| \leq |u+v| + |u-v|$   
2. *Identité du parallélogramme.*  $|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$

Exercice 25 : *Équations avec des modules.*

- Trouver l'ensemble des complexes  $z$  tels que :  $|z+1| = |z| + 1$ .
- Trouver l'ensemble des complexes  $z$  tels que :  $|z| = |1-z| = \frac{1}{|z|}$ .

Exercice 26 : *Équations avec des arguments.*

1. Trouver l'ensemble des complexes  $z$  tels que :  $2 \arg(z+i) \equiv \arg(z) + \arg(i) \pmod{\pi}$ .

Exercice 27 :

2. Trouver tous les complexes  $z$  tels que :  $z^3 = -16 \bar{z}^7$ .