

Semaine de colles n°7 du 11/11/24 au 15/11/24

**DU PROGRAMME PRÉCÉDENT :****• Calcul de sommes et de produits****I - Le symbole  $\Sigma$** 

- Notation  $\Sigma$  pour les sommes
- Règles de calcul : termes constants, facteur constant, changement d'indice, symétrie, sommes télescopiques.
- Séparation des termes pairs et impairs
- Sommes classiques :  $\sum_{k=1}^n k$ ,  $\sum_{k=1}^n k^2$  (\*) et  $\sum_{k=1}^n k^3$ .

- Sommes de type géométrique. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . On a : 
$$\sum_{k=p}^n q^k = \begin{cases} q^p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n-p+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

- Formule de Bernoulli :  $\forall (x, y) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}^*, x^n - y^n = (x-y) \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k = (x-y) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$

- Cas des sommes doubles, Sommes triangulaires :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i x_{i,j} = \sum_{1 \leq j \leq i \leq n} x_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n x_{i,j}$

**II - Le symbole  $\Pi$** 

- Notation  $\Pi$  pour les produits
- Règles de calcul, produits télescopiques.

**III - Formule du binôme de Newton et applications à la trigonométrie**

- Définition de  $n!$ , de  $\binom{n}{k}$ , valeurs particulières, symétrie et Si  $1 \leq k \leq n$ , on a :  $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ .

- Formule du triangle de Pascal et formule du binôme de Newton.

- Application à la trigonométrie :

Pour transformer des produits de  $\cos^p x$  et  $\sin^q x$ , avec  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ , en somme de  $\cos(kx)$  et  $\sin(lx)$  où  $(k, l) \in \mathbb{N}^2$  :

Utiliser les formules d'Euler puis appliquer la formule du binôme de Newton.

Pour exprimer  $\cos(nx)$  et  $\sin(nx)$ , avec  $n$  entier, en fonction de  $\sin x$  et  $\cos x$  :

On a :  $\cos(nx) = \operatorname{Re}(e^{inx}) = \operatorname{Re}((\cos x + i \sin x)^n)$  et  $\sin(nx) = \operatorname{Im}(e^{inx}) = \dots$  d'après la formule de De Moivre

Ensuite, on utilise la formule du binôme de Newton.

**NOUVEAU COURS :****• Compléments sur la décomposition en éléments simples d'une fonction rationnelle**

Aucune théorie sur la décomposition en éléments simples n'est au programme... par contre, il faut savoir décomposer, sans aide, en éléments simples une fraction rationnelle simple.

Conformément au programme : « Dans le cas où le dénominateur possède une racine multiple ou un facteur irréductible de degré 2, la forme cherchée doit être fournie »

**• Calcul de primitives et d'intégrales**

Ce chapitre n'a pas pour but de permettre de résoudre des exercices théoriques d'intégration.

**I - Rappels et compléments**

- Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle borné, relation de Chasles, linéarité, positivité et ordre.
- Lien entre primitives et intégrales.

**II - Quelques méthodes de calcul**

- Primitives usuelles (en lisant le tableau des dérivées « à l'envers »)
  - Transformations judicieuses d'expressions / reconnaître des dérivées de fonctions composées
- Ex. calcul de  $\int_0^{\pi/4} \tan t \, dt$ ,  $\int_0^{\pi/4} \tan^2 t \, dt$ ,  $\int_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x} \, dx$ ,  $\int_0^\pi \sin(2t) e^{\sin^2 t} \, dt$ ,  $\int_{-2}^2 \sqrt{t+2} \, dt$ ,  $\int_1^2 \frac{x}{(x^2+1)^3} \, dt$

- Primitives de fonctions de la forme :  $x \mapsto \cos^p x \sin^q x$

Rq. Si  $p$  ou  $q$  est impair, on peut faire apparaître des termes de la forme «  $u'(x) \times (u(x))^n$  »

- 2 méthodes pour déterminer une primitive de  $x \mapsto \cos(\omega x) e^{\lambda x}$  ou  $x \mapsto \sin(\omega x) e^{\lambda x}$

En utilisant que  $\cos(\omega x) e^{\lambda x} = \operatorname{Re}(e^{(\lambda + i\omega)x})$

Ou en cherchant une primitive sous la forme  $x \mapsto (A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)) e^{\lambda x}$

Une question de cours pourra être le calcul d'une primitive d'une fonction de cette forme. (\*)

- Primitives de fonctions rationnelles :

Primitives de  $x \mapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c}$  dans le cas de pôle simple / pôle double. (\*) (sur un exemple)

Ex. Primitives de  $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$  sur tout intervalle inclus dans  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ .

**III - Formule d'intégration par parties**

- Intégration par parties pour les fonctions de classe  $C^1$ , application au calcul de primitives.

Ex. Primitives de  $\ln$  sur  $\mathbb{R}^+$  (\*)

**IV - Changement de variable**

- Changement de variable : application aux calculs d'intégrales et de primitives

- Un changement de variable à connaître pour les fonctions en  $\sin$ ,  $\cos$  et  $\tan$  :  $t = \tan \frac{x}{2}$ .

Ex. Sur  $]0, \pi[$ , une primitive de  $x \mapsto \frac{1}{\sin x}$  est  $x \mapsto \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right|$  (\*)

(\*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n°8 : EDL

**Déroulement d'une colle**

- Une question de cours parmi celles signalées par (\*).
- Primitive/intégrale (sans IPP ni changement de variable mais petites transformations d'expressions, reconnaître la dérivé d'une composée, décomposition en éléments simples, ...)
- Exercice(s)

Un cours non connu entraîne une note < 10.

Exercices Chap. 5**Exercice 4 :** Calculer les sommes suivantes (suivant les cas  $n$  appartient à  $\mathbb{N}$  ou  $\mathbb{N}^*$ ) :

$$1. S_1 = \sum_{k=1}^n k(n+1-k) \quad 2. S_2 = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} \quad 3. S_3 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \quad 7. S_7 = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2$$

**Exercice 5 :** Sommes doubles.Calculer les sommes suivantes (suivant les cas  $n$  appartient à  $\mathbb{N}$  ou  $\mathbb{N}^*$ ) :

$$1. S_1 = \sum_{j=0}^n \sum_{k=i}^n \frac{i}{k+1} \quad 2. S_2 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} ij \quad 3. S_3 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \min(i, j) \quad 4. S_4 = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (i+j)$$

**Exercice 6 :**Pour  $a \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :  $S_n = \sum_{k=1}^n ka^k$ 1. Calculer  $S_n$  lorsque  $a = 1$ .2. Lorsque  $a \neq 1$ , calculer  $aS_n - S_n$  et en déduire la valeur de  $S_n$ .3. Lorsque  $a \neq 1$ , retrouver le résultat précédent en remarquant que  $S_n = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k a^k$ .**Exercice 12 :**Calculer les produits suivants : (suivant les cas  $n$  appartient à  $\mathbb{N}$  ou  $\mathbb{N}^*$ ) :

$$a. P_1 = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right) \quad b. P_2 = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \quad c. P_3 = \prod_{k=0}^n 2^k 3^{-k} \quad d. P_4 = \prod_{k=1}^n \frac{2k+3}{2k-1}$$

**Exercice 13 :**Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on pose :  $P(x) = \prod_{k=0}^n \cos(2^k x)$ .1. Calculer  $P(x)$  dans le cas où  $x \equiv 0 \pmod{\pi}$ .2. Pour  $x \notin \pi\mathbb{Z}$ , simplifier  $\sin(x)P(x)$  et déterminer  $P(x)$ .**Exercice 14 :**Calculer les sommes suivantes ( $n$  appartient à  $\mathbb{N}$ ) :

$$1. S_1' = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} \quad \text{et} \quad S_1'' = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1}$$

$$2. S_2' = \sum_{0 \leq 2k \leq n} (-1)^k \binom{n}{2k} \quad \text{et} \quad S_2'' = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} (-1)^k \binom{n}{2k+1}$$

**Exercice 17 :**1. Soit  $n$  et  $p$  deux entiers naturels tels que  $1 \leq p \leq n$ . Montrer que :  $p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}$   Formule à connaître2. Calculer les sommes suivantes :  $S = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$ ,  $S' = \sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k}$  et  $S'' = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{1+k} \binom{n}{k}$ .**Exercice 18 :**1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f : x \mapsto (x+1)^n$ . Développer l'expression de  $f(x)$ , de  $f'(x)$  et de  $f''(x)$ .2. En déduire les valeurs de :  $S = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$  et  $S' = \sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k}$ .3. Calculer :  $S'' = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$ .Exercices Chap. 6**Pas de liste d'exercices à savoir refaire pour ce chapitre :**

Il faut savoir calculer des intégrales et primitives

À vous de vous entraîner sur les exos de la feuille de TD (déjà faits ou dont vous avez eu la correction). Pensez aussi à la feuille de calculs !