

Semaine de colles n°8 du 18/11/24 au 22/11/24

DU PROGRAMME PRÉCÉDENT :**• Compléments sur la décomposition en éléments simples d'une fonction rationnelle**

Aucune théorie sur la décomposition en éléments simples n'est au programme... par contre, il faut savoir décomposer, sans aide, en éléments simples une fraction rationnelle simple.
Conformément au programme : « Dans le cas où le dénominateur possède une racine multiple ou un facteur irréductible de degré 2, la forme cherchée doit être fournie »

• Calcul de primitives et d'intégrales

Ce chapitre n'a pas pour but de permettre de résoudre des exercices théoriques d'intégration.

I - Rappels et compléments

- ➔ Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle borné, relation de Chasles, linéarité, positivité et ordre.
- ➔ Lien entre primitives et intégrales.

II - Quelques méthodes de calcul

- ➔ Primitives usuelles (en lisant le tableau des dérivées « à l'envers »)
- ➔ Transformations judicieuses d'expressions / reconnaître des dérivées de fonctions composées
Ex. calcul de $\int_0^{\pi/4} \tan t \, dt$, $\int_0^{\pi/4} \tan^2 t \, dt$, $\int_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$, $\int_0^\pi \sin(2t)e^{\sin^2 t} dt$, $\int_{-2}^2 \sqrt{t+2} \, dt$, $\int_1^2 \frac{x}{(x^2+1)^3} dt$

- ➔ Primitives de fonctions de la forme : $x \mapsto \cos^p x \sin^q x$

Rq. Si p ou q est impair, on peut faire apparaître des termes de la forme « $u'(x) \times (u(x))^n$ »

- ➔ 2 méthodes pour déterminer une primitive de $x \mapsto \cos(\omega x)e^{\lambda x}$ ou $x \mapsto \sin(\omega x)e^{\lambda x}$

En utilisant que $\cos(\omega x)e^{\lambda x} = \operatorname{Re}(e^{(\lambda + i\omega)x})$

Ou en cherchant une primitive sous la forme $x \mapsto (A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x))e^{\lambda x}$

Une question de cours pourra être le calcul d'une primitive d'une fonction de cette forme. (*)

- ➔ Primitives de fonctions rationnelles :

Primitives de $x \mapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c}$ dans le cas de pôle simple / pôle double. (*) (sur un exemple)

Ex. Primitives de $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$ sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

III - Formule d'intégration par parties

- ➔ Intégration par parties pour les fonctions de classe C^1 , application au calcul de primitives.

Ex. Primitives de \ln sur \mathbb{R}^+ (*)

IV - Changement de variable

- ➔ Changement de variable : application aux calculs d'intégrales et de primitives

- ➔ Un changement de variable à connaître pour les fonctions en \sin , \cos et \tan : $t = \tan \frac{x}{2}$.

Ex. Sur $]0, \pi[$, une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sin x}$ est $x \mapsto \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right|$ (*)

NOUVEAU COURS :**• Équations différentielles linéaires (EDL)****I - Vocabulaire général sur les équations différentielles**

- ➔ Vocabulaire général sur les ED : ordre, équation linéaire, courbes intégrales.

II - EDL d'ordre 1 de la forme $y' + a(x)y = b(x)$ (E), où a et b continues sur I intervalle de \mathbb{R}

- ➔ Cas particulier des EDL 1 à coefficients constants, condition initiale.
- ➔ Équation homogène associée à (E) et forme des solutions : Les solutions de l'EDL 1 (E) s'obtiennent en faisant la somme de la solution générale de l'équation homogène associée (H) et d'une solution particulière de (E).
- ➔ Expression de la solution générale de l'équation homogène associée (H).
- ➔ Recherche d'une solution particulière : pp. de superposition des solutions, solution évidente, si a est une constante on recherche d'une solution de la même forme que le second membre, mth. de variation de la cste.
- ➔ Condition initiale : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy

III - EDL 2 à coefficients constants : $ay'' + by' + cy = \varphi(x)$ (E)

- ➔ Équation homogène associée à (E) et forme des solutions : Les solutions de l'EDL 2 (E) s'obtiennent en faisant la somme de la solution générale de l'équation homogène associée (H) et d'une solution particulière de (E) :
- ➔ Expression de la solution générale de l'équation homogène associée (H).
Cas où les coefficients sont **réels** (expression des solutions à **valeurs réelles**).
- ➔ Recherche d'une solution particulière : pp. de superposition des solutions, solution évidente, recherche d'une solution de la même forme que le second membre.

Exemples fait dans le cours : $y'' - 5y' + 6y = e^{2x} + 5e^{-x}$ (*)

$$y'' + y' + y = x \cos x + 1 \quad (*)$$

- ➔ Conditions initiales : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy

RQ pour les interrogateurs :

Nous n'avons pas encore vu : -Raccord de solutions / changement de fonction inconnue / changement de variable po pour la résolution d'EDL

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n°9 : Ensembles et applications

Déroulement d'une colle

1. Une ou deux questions parmi :
Question de cours signalée par (*)
Calcul d'une intégrale ou primitive par changement de variable
Citer les théorèmes de résolution d'une EDL 1 ou EDL 2 homogène
2. Exercice(s)

Un cours non connu entraîne une note < 10.



Pas de liste d'exercices à savoir refaire cette semaine :

Il faut savoir calculer des intégrales et primitives

Il faut savoir et résoudre des EDL 1.

À vous de vous entraîner sur les exos de la feuille de TD (déjà faits ou dont vous avez eu la correction)

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître