# Semaine de colles n°9 du 25/11/24 au 29/11/24

## DU PROGRAMME PRÉCÉDENT :

### • Équations différentielles linéaires (EDL)

**I – Vocabulaire général sur les équations différentielles**

- Vocabulaire général sur les ED : ordre, équation linéaire, courbes intégrales.

**II – EDL d'ordre 1 de la forme** $y' + a(x)\, y = b(x)$ (E), où a et b continues sur I intervalle de $\mathbb{R}$

- Cas particulier des EDL 1 à coefficients constants, condition initiale.
- Équation homogène associée à (E) et forme des solutions : Les solutions de l'EDL 1 (E) s'obtiennent en faisant la somme de la solution générale de l'équation homogène associée (H) et d'une solution particulière de (E).
- Expression de la solution générale de l'équation homogène associée (H).
- Recherche d'une solution particulière : pp. de superposition des solutions, solution évidente, si a est une constante on recherche d'une solution de la même forme que le second membre, mth. de variation de la cste.
- Condition initiale : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy

**III – EDL 2 à coefficients constants :** $ay''+by'+cy=\varphi(x)$ (E)

- Équation homogène associée à (E) et forme des solutions : Les solutions de l'EDL 2 (E) s'obtiennent en faisant la somme de la solution générale de l'équation homogène associée (H) et d'une solution particulière de (E) :
- Expression de la solution générale de l'équation homogène associée (H).
  Cas où les coefficients sont **réels** (expression des solutions à **valeurs réelles**).
- Recherche d'une solution particulière : pp. de superposition des solutions, solution évidente, recherche d'une solution de la même forme que le second membre.

Exemples fait dans le cours : $y''-5y'+6y=e^{2x}+5e^{-x}$ **(*)**

$y''+y'+y=x\cos x+1$ **(*)**

- Conditions initiales : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy

## NOUVEAU COURS :

### • Équations différentielles linéaires (EDL)

**Vu en TD :**

- Exemple de changement de fonction inconnue pour la résolution d'EDL (cf. ex. à savoir refaire)
- Exemple de changement de variable pour la résolution d'EDL (cf. ex. à savoir refaire)

RQ pour les interrogateurs :
Nous n'avons pas encore vu de raccord de solutions.

### • Ensembles et applications

**I – Notions sur les ensembles**

- Inclusion, appartenance, ensemble des parties d'un ensemble E.
- Opérations sur les parties d'un ensemble :
  Réunion, intersection, distributivité.
  Complémentaire, lois de Morgan
  Différence.
- Recouvrement disjoint, partition
- Produit cartésien d'ensembles.

**II – Applications**

- Définition et exemples : application identité, fonction indicatrice, famille d'éléments
- Restriction, prolongement d'applications, application induite, composition de deux applications.
- Image directe et image réciproque.

Notation : Si f : E $\longrightarrow$ F, on note : f(E) = Im f et s'appelle l'image de f.

Rq. Pour éviter des confusions, pour le moment, l'image réciproque de B peut être notée : $\overset{\frown}{f^{-1}(B)}$

⚠ **On fera particulièrement attention à la notation « $f^{-1}$ (B) » qui ne signifie pas que $f$ est bijective !**

**III – Injectivité, surjectivité, bijectivité**

- Définition et caractérisation d'une application injective.
  La composée de deux applications injectives est injective. **(*)**
  Si g ∘ f est injective alors f est injective. **(*)**
- Définition et caractérisation d'une application surjective.
  La composée de deux applications surjectives est surjective. **(*)**
  Si g ∘ f est surjective alors g est surjective. **(*)**

RQ pour les interrogateurs : Nous n'avons pas encore vu les applications bijectives

**(*)** Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n°10 : Ensembles et applications (fin) + Nouvelles fonctions usuelles

## Déroulement d'une colle

1. Deux questions le cours sur le chapitre : « Ensembles et applications » :
   - Parmi celles signalées par (*)
   - Donner les définitions et caractérisations d'image directe et d'image réciproque et donner des exemples.
   - Donner les définitions et caractérisations d'application injective/surjective et savoir donner des exemples et contre-exemples.
   - Trouver des exemples où $g \circ f$ injective et $g$ non injective, $g \circ f$ surjective et $f$ non surjective, etc…
2. Exercice(s)

Un cours non connu entraine une note < 10.

## Semaine de colles n°9 du 25/11/24 au 29/11/24

## Exercices Chap. 7

Il faut savoir et résoudre des EDL 1 et EDL 2 à coefficients constants.
À vous de vous entrainer sur les exos de la feuille de TD (déjà faits ou dont vous avez eu la correction)

**Exercice 12 :** *Changement de fonction inconnue.*
On considère l'équation $(x^2 + x)\, y'' + (x - 1)\, y' - y = 0$. (E)
**1.** Déterminer les fonctions polynômiales, non nulles, solutions de (E).
**2.** Sur $]1, +\infty[$, poser $y : x \longmapsto (x-1)z(x)$ où $z$ est 2 fois dérivable et résoudre (E) sur $]1, +\infty[$.

*On donne :* $\forall\ x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 0, 1\},\ \dfrac{3x^2+1}{x(x-1)(x+1)} = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x-1} + \dfrac{2}{x+1}$
(Vous devez être capable de retrouver ce développement en éléments simples)

**Exercice 14 :** *Changement de variable.*
Résoudre sur $\mathbb{R}^{+*}$, l'équation différentielle $x^2y'' + x\,y' + y = 0$ (E), en posant $x = e^t$.

**Exercice 17 :**
Trouver toutes les fonctions $f$ réelles, dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que : $\forall\ x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(-x)$.
*Ind. On justifiera que f est deux fois dérivable sur* $\mathbb{R}$.

## Exercices Chap. 8

**Exercice 6 :** ***Image directe.***
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On considère A, B et A′ trois parties de E.
**1.** Rappeler la définition de l'image directe de A par $f$.
**2. a.** Dans cette question, $E = F = \mathbb{R}$ et $f(x) = x^2$, déterminer $f([0, 2])$ et $f([-3, 2])$.

**b.** Dans cette question, $E = F = \mathbb{R}$ et $f(x) = \cos x$, déterminer $f([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$ et $f(\pi\mathbb{Z})$.

**3.** Que signifie la condition $\mathrm{Im}(f) = F$ ?
**4.** Démontrer que si $A \subset A' \subset E$ alors $f(A) \subset f(A')$.
**5. a.** Montrer que : $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
**b.** Montrer que : $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. A t-on l'égalité ?
**c.** Montrer que si $f$ est injective alors $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.

**Exercice 7 :** ***Image réciproque.***
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On considère A, B et B′ trois parties de F.
**1.** Rappeler la définition de l'image réciproque de B par $f$. Que vaut $f^{-1}(F)$ ?
**2. a.** Dans cette question, $E = F = \mathbb{R}$ et $f(x) = x^2$, déterminer $f^{-1}([-4, 4])$ et $f^{-1}([1, 4])$.

**b.** Dans cette question, $E = F = \mathbb{R}$ et $f(x) = \cos x$, déterminer $f^{-1}([-4, 0])$ et $f^{-1}([0, \frac{1}{2}])$.

**3.** Démontrer que si $B \subset B' \subset F$ alors $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$.
**4. a.** Montrer que : $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
**b.** Montrer que : $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
**5.** Montrer que : $f^{-1}(\overline{A}) = \overline{f^{-1}(A)}$

**On fera particulièrement attention à la notation « $f^{-1}$ (B) » qui ne signifie pas que $f$ est bijective !**
**Si $f : E \longrightarrow F$ et B une partie de F alors $f^{-1}$ (B) existe toujours et est l'image réciproque de B par $f$.**
**Par contre, pour $x \in F$, $f^{-1}(x)$ n'a de sens que si $f$ est bijective.**

**Exercice 10 :**
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application, A une partie de E et B une partie de F. Montrer que : $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$.