Semaine de colles n°10 du 02/12/24 au 06/12/24

DU PROGRAMME PRÉCÉDENT :

- **Ensembles et applications**

I – Notions sur les ensembles

- Inclusion, appartenance, ensemble des parties d'un ensemble E.
- Opérations sur les parties d'un ensemble :
  Réunion, intersection, distributivité.
  Complémentaire, lois de Morgan
  Différence.
- Recouvrement disjoint, partition
- Produit cartésien d'ensembles.

II – Applications

- Définition et exemples : application identité, fonction indicatrice, famille d'éléments
- Restriction, prolongement d'applications, application induite, composition de deux applications.
- Image directe et image réciproque.

Notation : Si $f : E \longrightarrow F$, on note : $f(E) = \operatorname{Im} f$ et s'appelle l'image de f.

Rq. Pour éviter des confusions, pour le moment, l'image réciproque de B peut être notée : $\overset{\frown}{f^{-1}}(B)$

⚠ **On fera particulièrement attention à la notation « f^{-1} (B) » qui ne signifie pas que *f* est bijective !**

III – Injectivité, surjectivité, bijectivité

- Définition et caractérisation d'une application injective.
  La composée de deux applications injectives est injective. ***(*)***
  Si $g \circ f$ est injective alors f est injective. ***(*)***
- Définition et caractérisation d'une application surjective.
  La composée de deux applications surjectives est surjective. ***(*)***
  Si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective. ***(*)***

NOUVEAU COURS :

- **Ensembles et applications**

III – Injectivité, surjectivité, bijectivité

- Définition d'une application bijective, application réciproque, propriétés, bijection réciproque d'une composée.
- Soit $f : E \longrightarrow F$. S'il existe $g : F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$ alors f bijective et $g = f^{-1}$. ***(*)***

- **Nouvelles fonctions usuelles**

I – Fonctions circulaires réciproques

- Fonctions circulaires réciproques : définition, propriétés, dérivabilité et dérivée, variations et représentation graphique (avec les tangentes particulières et les asymptotes éventuelles).
  Justification de la dérivabilité et calcul de la dérivée des fonctions arccos, arcsin et arctan ***(*)***

En particulier, il faut savoir démontrer que : $\forall x \in [-1, 1], \sin(\arccos(x)) = \cos(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$

- On a : $\forall x > 0, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$ et $\forall x < 0, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$ ***(*)***

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 12 : Nouvelles fonctions usuelles (fin)

Déroulement d'une colle

1. Une question de cours sur le chapitre : « Ensembles et applications » parmi :
   - Une question parmi celles signalées par (*)
   - Il faut savoir donner les définitions et caractérisations d'image directe et d'image réciproque, et savoir donner des exemples.
   - Il faut savoir donner les définitions et caractérisations d'application injective/surjective/bijective et savoir donner des exemples et contre-exemples.
2. Sur le chap. « Nouvelles fonctions usuelles » :
   Donner tous les résultats relatifs à l'une nouvelles fonctions : définition, propriétés, dérivabilité et dérivée, variations et représentation graphique (avec les tangentes particulières et les asymptotes éventuelles).
   Ou une question de cours parmi celles signalées par (*)
3. Exercice(s)

Un cours non connu entraine une note < 10.

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Semaine de colles n°10 du 02/12/24 au 06/12/24

Exercices Chap. 8

Exercice 6 : ***Image directe.***
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On considère A, B et A′ trois parties de E.
1. Rappeler la définition de l'image directe de A par f.
2. a. Dans cette question, $E = F = \mathbb{R}$ et $f(x) = x^2$, déterminer $f([0, 2])$ et $f([-3, 2])$.
b. Dans cette question, $E = F = \mathbb{R}$ et $f(x) = \cos x$, déterminer $f([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$ et $f(\pi\mathbb{Z})$.
3. Que signifie la condition $\mathrm{Im}(f) = F$?
4. Démontrer que si $A \subset A' \subset E$ alors $f(A) \subset f(A')$.
5. a. Montrer que : $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
b. Montrer que : $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. A t-on l'égalité ?
c. Montrer que si f est injective alors $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.

Exercice 7 : ***Image réciproque.***
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On considère A, B et B′ trois parties de F.
1. Rappeler la définition de l'image réciproque de B par f. Que vaut $f^{-1}(F)$?
2. a. Dans cette question, $E = F = \mathbb{R}$ et $f(x) = x^2$, déterminer $f^{-1}([-4, 4])$ et $f^{-1}([1, 4])$.
b. Dans cette question, $E = F = \mathbb{R}$ et $f(x) = \cos x$, déterminer $f^{-1}([-4, 0])$ et $f^{-1}([0, \frac{1}{2}])$.
3. Démontrer que si $B \subset B' \subset F$ alors $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$.
4. a. Montrer que : $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
b. Montrer que : $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
5. Montrer que : $f^{-1}(\overline{A}) = \overline{f^{-1}(A)}$

⚠ **On fera particulièrement attention à la notation « $f^{-1}(B)$ » qui ne signifie pas que f est bijective !**
Si $f : E \longrightarrow F$ et B une partie de F alors $f^{-1}(B)$ existe toujours et est l'image réciproque de B par f.
Par contre, pour $x \in F$, $f^{-1}(x)$ n'a de sens que si f est bijective.

Exercice 10 :
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application, A une partie de E et B une partie de F. Montrer que : $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$.

Exercice 12 :
a. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$. L'application f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ? Si oui, déterminer f^{-1}
b. Soit $f : \mathbb{C}\setminus\{1\} \longrightarrow \mathbb{C}\setminus\{2\}$ définie par : $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{1\},\ f(z) = \dfrac{2z+1}{z-1}$. Montrer que l'application f est bijective et déterminer f^{-1}.
c. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (2x + 3y, x - 2y)$. L'application f est-elle bijective ? Si oui, déterminer f^{-1}.

d. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (x + y, 3x - y, 2x + y)$.
L'application f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ? Si oui, déterminer f^{-1}. Que vaut $f(\mathbb{R}^2)$?
e. Soit $\phi : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par $\phi(f) = f'$. L'application f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

Exercice 17 :
Soit E un ensemble et $f : E \longrightarrow E$ une application telle que : $f \circ f \circ f = f$. Montrer que : f est injective $\Leftrightarrow$ f est surjective.

Exercices Chap. 9

Exercice 6 :
Calculer les valeurs exactes des réels suivants : **a.** $A = \arcsin\frac{4}{5} + \arcsin\frac{5}{13} + \arcsin\frac{16}{65}$

Exercice 8 :
Résoudre les équations suivantes : **a.** $\arccos x = \arcsin(2x)$

Exercice 10 :
Simplifier les expressions suivantes : **a.** $\arctan(\sqrt{1+x^2} - x)$