

Semaine de colles n°11 du 09/12/24 au 13/12/24

DU PROGRAMME PRÉCÉDENT :• **Ensembles et applications****I - Notions sur les ensembles****II - Applications****III - Injectivité, surjectivité, bijectivité**

- Définition et caractérisation d'une application injective.
La composée de deux applications injectives est injective.
Si $g \circ f$ est injective alors f est injective.
- Définition et caractérisation d'une application surjective.
La composée de deux applications surjectives est surjective.
Si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.
- Définition d'une application bijective, application réciproque, propriétés, bijection réciproque d'une composée.
- Soit $f : E \rightarrow F$. S'il existe $g : F \rightarrow E$ telle que $g \circ f = \text{Id}_E$ et $f \circ g = \text{Id}_F$ alors f bijective et $g = f^{-1}$. (*)

• **Nouvelles fonctions usuelles****I - Fonctions circulaires réciproques**

- Fonctions circulaires réciproques : définition, propriétés, dérivabilité et dérivée, variations et représentation graphique (avec les tangentes particulières et les asymptotes éventuelles).

Justification de la dérivabilité et calcul de la dérivée des fonctions arccos, arcsin et arctan (*)

En particulier, il faut savoir démontrer que : $\forall x \in [-1, 1], \sin(\arccos(x)) = \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$

- On a : $\forall x > 0, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$ et $\forall x < 0, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$ (*)

NOUVEAU COURS :• **Nouvelles fonctions usuelles****II - Fonctions hyperboliques directes : ch et sh**

- Définition, propriétés, dérivabilité et dérivée, variations et représentation graphique (avec les tangentes particulières et les asymptotes éventuelles), $\forall x \in \mathbb{R}, \text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$.
- Complément : étude de la fonction tangente hyperbolique. Cette fonction est hors programme.

III - Retour sur le calcul de primitives et d'intégrales

- Primitives de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ sur $] -a, a[$ et primitives de $x \mapsto \frac{1}{x^2+a^2}$ sur \mathbb{R}

- Primitives de $x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$

Rq. Il ne s'agit pas de connaître les formules par cœur mais il faut savoir appliquer la méthode sur un exemple choisi par l'interrogateur. (*)

• **Les ensembles \mathbb{N} et \mathbb{Z}** **I - Les entiers naturels et le principe de récurrence**

- L'ensemble \mathbb{N} .
- Raisonnement par récurrence simple, double/avec deux prédécesseurs, forte et finie.

II - Les entiers relatifs

- L'ensemble \mathbb{Z} , Multiples et diviseurs d'un entier, PGCD et PPCM

III - Division euclidienne

- Division euclidienne dans \mathbb{N} .
- Algorithme d'Euclide pour le calcul d'un PGCD

IV - Nombres premiers

- Nombres premiers, décomposition en facteurs premiers (admis)
- L'ensemble des nombres premiers est infini (*)
- Application au calcul du PGCD et PPCM, $\text{PGCD}(a, b) \times \text{PPCM}(a, b) = ab$

Rq. pour lss interrogateurs : Nous n'avons pour le moment pas fait d'exercices d'arithmétique.

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 12 : Suites numériques (début)

Déroulement d'une colle

1. Une ou deux questions de cours parmi :
 - Une question parmi celles signalées par (*)
 - Donner tous les résultats relatifs à l'une nouvelles fonctions : définition, propriétés, dérivabilité et dérivée, variations et représentation graphique (avec les tangentes particulières et les asymptotes éventuelles).
 - Un exercice à traiter à l'aide d'un raisonnement par récurrence simple, double ou forte.
2. Exercice(s)

Un cours non connu entraine une note < 10.

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Exercices Chap. 8Exercice 12 :

- a. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$. L'application f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ? Si oui, déterminer f^{-1} .
- b. Soit $f: \mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{2\}$ définie par : $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}, f(z) = \frac{2z+1}{z-1}$. Montrer que l'application f est bijective et déterminer f^{-1} .
- c. Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (2x + 3y, x - 2y)$. L'application f est-elle bijective ? Si oui, déterminer f^{-1} .
- d. Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (x + y, 3x - y, 2x + y)$.
L'application f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ? Si oui, déterminer f^{-1} . Que vaut $f(\mathbb{R}^2)$?
- e. Soit $\phi: C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par $\phi(f) = f'$. L'application f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

Exercice 17 :

Soit E un ensemble et $f: E \rightarrow E$ une application telle que : $f \circ f \circ f = f$. Montrer que : f est injective $\Leftrightarrow f$ est surjective.

Exercices Chap. 9Exercice 3 :

Déterminer le domaine de définition et courbe représentative des fonctions : $f: x \mapsto \arcsin(\sin x)$ et $g: x \mapsto \arccos(\cos x)$.

Exercice 6 :

Calculer les valeurs exactes des réels suivants : **b.** $B = \arctan 2 + \arctan 3$

Exercice 8 :

Résoudre les équations suivantes : **a.** $\arccos x = \arcsin(2x)$

Exercice 10 :

Simplifier les expressions suivantes : **a.** $\arctan(\sqrt{1+x^2} - x)$

Exercice 11 :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$.

- Déterminer l'ensemble de définition.
À l'aide des théorèmes généraux, déterminer sur quel(s) intervalle(s) f est dérivable. Calculer la dérivée de f sur ces intervalles.
- Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative.
- a.** Démontrer que : $\forall x \in [-1, 1], f(x) = 2 \arctan x$.
b. Déterminer des expressions similaires de $f(x)$ sur les autres intervalles de l'ensemble de définition de f .
- Le but de cette question est de retrouver par une autre méthode, les résultats de la question 3.**
 - Soit $t \in]-\pi, \pi[$. Exprimer $\sin t$ en fonction de $\tan \frac{t}{2}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose : $\theta = 2 \arctan x$.

- Dans quel intervalle varie θ ? Que vaut x en fonction de θ ?
- Donner une expression de $f(x)$ en fonction de θ .
- Retrouver l'expression de $f(x)$ en fonction de x obtenue à la question 3.

Exercice 15 :

b. Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation : $\operatorname{ch} x \geq 2$.

Exercice 19 :

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la somme : $S = \sum_{k=0}^n \operatorname{ch}(kx), x \in \mathbb{R}$.

Les 4 exercices suivants sont à travailler seuls :Exercice 21 : Fonctions rationnelles.

Calculer **une** primitive des fonctions suivantes, **en précisant l'ensemble de validité**. **3.** $x \mapsto \frac{x-1}{x^2+x+1}$

Exercice 23 : Calcul de primitives.

Calculer **une** primitive des fonctions suivantes, **en précisant l'ensemble de validité**.

$$1. x \mapsto \arcsin x \qquad 5. x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x(x+3)}} \text{ en posant : } u = \sqrt{x}$$

Exercice 24 : Calcul d'intégrales.

Calculer la valeur des intégrales suivantes. On commencera par **justifier leur existence**.

$$1. I_1 = \int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}} dx \qquad 2. I_2 = \int_0^1 \frac{1}{x+i} dx$$

Exercice 25 :

2. Résoudre sur \mathbb{R} l'équation $\operatorname{ch}(x)y' + \operatorname{sh}(x)y = 1 + x^2$ et trouver les solutions telles que $y(0) = 1$.