# Semaine de colles n°13 du 13/01/25 au 17/01/25

## Du programme précédent :

### • Suites numériques

**I - Généralités**

- Définition d'une suite, propriété vraie APCR.
- Opérations sur les suites
- Vocabulaire : suites constantes, stationnaires, majorées, minorées, bornées, monotones, périodiques, extraites.
- La suite $(u_n)$ est bornée $\Leftrightarrow$ la suite $(|u_n|)$ est majorée

**II - Suites convergentes**

- Définition de la convergence d'une suite, unicité de la limite d'une suite convergente **(*)**
- Encadrement d'une suite cv. : Toute suite cv. est bornée et si $(u_n)$ cv. vers $\ell > 0$ alors APCR, $u_n > \frac{\ell}{2} > 0$.
- Suites extraites et convergence, cas de la convergence de $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ vers la même limite $\ell$.
  Application : utilisation de suite(s) extraite(s) pour montrer la divergence d'une suite.
- Opérations sur les limites : somme de 2 suites cv. vers 0, produit d'une suite bornée et d'une suite cv. vers 0, cas général.
- Limites et ordre : passage à la limite des inégalités larges, th. de convergence par encadrement (dit des gendarmes).
- Th. de la limite monotone **(*)** (Démonstration faite en classe pour une suite croissante)
- Suites adjacentes : définition et convergence :
  Application aux approximations décimales d'un réel, tout réel est limite d'une suite de rationnels.

## Nouveau cours :

### • Suites numériques

**III - Limites infinies**

- Définition, opérations sur les limites infinies, formes indéterminées.
- Limites infinies et ordre, th. de la limite monotone. **(*)** (Démonstration faite pour une suite croissante)

**IV - Suites complexes**

- Définition, suites bornées, limite, caractérisation à l'aide des parties réelles et imaginaires.
- Propriétés restant valables pour les suites complexes.

### • Compléments : les suites récurrentes linéaires

**I - Suites arithmétiques**

**II - Suites géométriques :** Rappels succincts + Cas de convergence des suites géométriques complexes

**III - Suites récurrentes linéaires d'ordre 1 ou arithmético-géométriques**

**IV - Suites récurrentes linéaires d'ordre 2** (Méthode d'étude provisoirement admise)

- Cas des suites complexes et réelles.

⚠ Rq. interrogateurs :
Les suites vérifiant une relation de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ n'ont pas encore été vue en classe.
Elles seront traitées après le chapitre sur la dérivabilité.

### • Suites numériques : Relations de comparaison

- Relation de domination, suite négligeable devant une autre, suites équivalentes : définitions, caractérisations par le quotient $\frac{u_n}{v_n}$, propriétés, compatibilité avec les opérations.
- Exemples de référence :
  - Si $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$, $(\ln n)^\beta = o(n^\alpha)$
  - Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\gamma > 0$, $n^\alpha = o(e^{\gamma n})$ ou autre formulation : Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x > 1$, $n^\alpha = o(x^n)$
  - Si $x > 0$, $x^n = o(n!)$
  - $n! = o(n^n)$
- ⚠ ON NE PEUT PAS AJOUTER DES ÉQUIVALENTS !!!! ON NE PEUT PAS COMPOSER DES ÉQUIVALENTS !!!!
- Lien entre équivalents et la limite d'une suite.

Rq. On pourra s'assurer que les élèves ont appris les définitions avec des petites démonstrations du type :
Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = O(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$ **(*)**

- Obtention d'un équivalent à l'aide d'un encadrement.
- Équivalents de références (à savoir redémontrer **(*)** )

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle convergente vers 0. On a :

- $\sin u_n \sim u_n$ et $\tan u_n \sim u_n$
- $\cos u_n \sim 1$ et $1 - \cos u_n \sim \frac{u_n^2}{2}$
- $\operatorname{sh} u_n \sim u_n$ et $\operatorname{ch} u_n \sim 1$
- $e^{u_n} \sim 1$
- $e^{u_n} - 1 \sim u_n$
- $\ln(u_n + 1) \sim u_n$
- Pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$, **fixé** : $(1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$
- $\arccos(u_n) \sim \frac{\pi}{2}$
- $\arcsin(u_n) \sim u_n$ et $\arctan(u_n) \sim u_n$

**(*)** Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 14 :

### Déroulement d'une colle

1. Deux questions parmi :
   - Un calcul de limite avec utilisation d'équivalents
   - Étude d'une SRL1 ou SRL2 + calcul éventuel de la limite
   - Une question de cours parmi celles signalées par (*)
2. Exercice(s)

Un cours non connu entraine une note < 10.

# Semaine de colles n°13 du 13/01/25 au 17/01/25 - Exercices à savoir refaire

## Exercices Chap. 11

**Exercice 2 :**
Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite réelle à valeurs entières. Prouver qu'elle est convergente si et seulement si elle est stationnaire.

**Exercice 5 :**
Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes.
Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

**Exercice 6 :** ***Théorème de Cesàro.***
On considère $(u_n)$ une suite convergente de limite $\ell \in \mathbb{R}$. On définit $(v_n)$ par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ .

**1.** Dans cette question, on suppose que $\ell = 0$.

**a.** Soit $\varepsilon > 0$. On fixe un entier N non nul tel que $n \geq N$ implique que $|u_n| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. *(On pensera à justifier l'existence de N)*

Démontrer que pour tout $n \geq N$, $|v_n| \leq \dfrac{|u_1| + \ldots + |u_{N-1}|}{n} + \dfrac{\varepsilon}{2}$.

**b.** En déduire qu'il existe un entier N′ non nul tel que $n \geq N'$ implique que $|v_n| \leq \varepsilon$.

**c.** Conclure que $(v_n)$ est convergente vers 0.

**2.** En vous ramenant au cas précédent, démontrer que la propriété est encore valable si $\ell$ est un réel quelconque.

**Exercice 8 :**
Pour tout entier naturel $n$ non nul, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n} - u_n \geq \dfrac{1}{2}$. Que peut-on en déduire ?

**Exercice 9 :**
On cherche à montrer que la suite $(\cos n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente. Par l'absurde, on suppose qu'elle est convergente vers une limite $\ell$.
**1.** En calculant la limite de la suite extraite $(\cos(2n))_{n \in \mathbb{N}}$ de deux façons différentes, en déduire les valeurs que peut prendre $\ell$.
**2.** Calculer la limite de la suite $(\cos(n+1) + \cos(n-1))_{n \in \mathbb{N}}$ de deux façons différentes, en fonction de $\ell$.
**3.** Conclure.

**Exercice 12 :** Calculer, si elles existent, les limites des suites suivantes dont on donne le terme général :

**1.** $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ **2.** $u_n = \dfrac{n + (-1)^n}{n - (-1)^n}$ **5.** $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$ **6.** $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$

**7.** $u_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\lfloor kx \rfloor$, $x \in \mathbb{R}$ **11.** $u_n = 2^n \sin\dfrac{\alpha}{2^n}$, $\alpha \in\, ]0, \pi[$

**Exercice 14 :** ***Suite définie implicitement.***

⚠ LA MÉTHODE POUR ÉTUDIER LE SENS DE VARIATION D'UNE SUITE DÉFINIE IMPLICITEMENT DOIT ÊTRE CONNUE.

Pour tout entier $n \geq 3$ et pour tout réel $x > 0$, on pose : $f_n(x) = x - n \ln x$. On donne : $\ln(2) \approx 0{,}7$.

**1. a.** Soit $n \geq 3$. Étudier les variations de la fonction $f_n$ sur son ensemble de définition.

**b.** Soit $n \geq 3$. Montrer qu'il existe un unique réel $x_n \in\, ]1, 2[$ tel que : $f_n(x_n) = 0$.

**2. a.** Soit $n \geq 3$. Déterminer le signe de $f_n(x_{n+1})$.

En déduire que la suite $(x_n)$ est monotone et donner son sens de monotonie.

**b.** Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 3}$ est convergente.

**c.** En utilisant que pour tout entier $n \geq 3$, $f_n(x_n) = 0$, montrer que : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} x_n = 1$.

**Exercice 18 :**
**1.** Soit $(u_n)$ une suite à termes positifs, décroissante et convergente vers 0. On définit la suite $(S_n)$ par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k$ .

Montrer que $(S_n)$ est convergente. *Ind. On pourra montrer que les suites extraites $(S_{2n})$ et $(S_{2n+1})$ sont adjacentes.*

**2.** Montrer que $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}\right)_{n \geq 1}$ converge et déterminer sa limite. *Ind. On pourra utiliser que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k} = \displaystyle\int_0^1 t^{k-1}\,dt$ .*

## Exercices Chap. 12

**Exercice : ex 8 chap. 11 + 3 chap. 12** (La fin sera corrigée mardi)

**0.** Pour tout entier naturel $n$ non nul, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n} - u_n \geq \dfrac{1}{2}$. Que peut-on en déduire ?

**1.** Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \dfrac{1}{k}$.

**2.** En déduire que : $\forall n \geq 2$ $u_n - 1 \leq \ln(n) \leq u_n - \dfrac{1}{n}$.

**3.** En déduire que $u_n$ est équivalent à $\ln(n)$ quand $n$ tend vers $+\infty$ .
**4.** On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = u_n - \ln n$. Montrer que $(x_n)$ est convergente. On note $\gamma$ cette limite, c'est la *constante d'Euler*.

**Exercice 5 :**
Déterminer, si elles existent, les limites des suites dont on donne le terme général ci-dessous :

**1.** $u_n = n\ln\left(\sqrt{\dfrac{n+1}{n-1}}\right)$ **2.** $u_n = \sqrt{n}\sin\left(\dfrac{1}{\ln(n)}\right)$ **3.** $u_n = n\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)$ **4.** $u_n = \sqrt{n^2 + 36n + 12} - n$

**5.** $u_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$ **6.** $u_n = n\left(\sin\dfrac{1}{n} - \tan\dfrac{1}{2n}\right)$ **7.** $u_n = \left(2\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) + \cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^n$ **8.** $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)^{n^2}$