# Semaine de colles n°14 du 29/01/25 au 24/01/25

## DU PROGRAMME PRÉCÉDENT :

### • Suites numériques

**I - Généralités**

**II - Suites convergentes**

**III - Limites infinies**

- Définition, opérations sur les limites infinies, formes indéterminées.
- Limites infinies et ordre, th. de la limite monotone. (Démonstration faite pour une suite croissante)

**IV - Suites complexes**

- Définition, suites bornées, limite, caractérisation à l'aide des parties réelles et imaginaires.
- Propriétés restant valables pour les suites complexes.

### • Compléments : les suites récurrentes linéaires

**I - Suites arithmétiques**

**II - Suites géométriques :** Rappels succincts + Cas de convergence des suites géométriques complexes

**III - Suites récurrentes linéaires d'ordre 1 ou arithmético-géométriques**

**IV - Suites récurrentes linéaires d'ordre 2** (Méthode d'étude provisoirement admise)

- Cas des suites complexes et réelles.

⚠ Rq. interrogateurs :
Les suites vérifiant une relation de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ n'ont pas encore été vue en classe.
Elles seront traitées après le chapitre sur la dérivabilité.

### • Suites numériques : Relations de comparaison

- Relation de domination, suite négligeable devant une autre, suites équivalentes : définitions, caractérisations par le quotient $\frac{u_n}{v_n}$, propriétés, compatibilité avec les opérations.
- Exemples de référence :
  - Si $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$, $(\ln n)^\beta = o(n^\alpha)$
  - Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\gamma > 0$, $n^\alpha = o(e^{\gamma n})$ ou autre formulation : Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x > 1$, $n^\alpha = o(x^n)$
  - Si $x > 0$, $x^n = o(n!)$
  - $n! = o(n^n)$
- ⚠ ON NE PEUT PAS AJOUTER DES ÉQUIVALENTS !!!! ON NE PEUT PAS COMPOSER DES ÉQUIVALENTS !!!!
- Lien entre équivalents et la limite d'une suite.

Rq. On pourra s'assurer que les élèves ont appris les définitions avec des petites démonstrations du type :
Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = O(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$

- Obtention d'un équivalent à l'aide d'un encadrement.
- Équivalents de références (à savoir redémontrer)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente vers 0. On a :

- $\sin u_n \sim u_n$ et $\tan u_n \sim u_n$
- $\cos u_n \sim 1$ et $1 - \cos u_n \sim \frac{u_n^2}{2}$
- $\operatorname{sh} u_n \sim u_n$ et $\operatorname{ch} u_n \sim 1$
- $e^{u_n} \sim 1$
- $e^{u_n} - 1 \sim u_n$
- $\ln(u_n + 1) \sim u_n$
- Pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$, **fixé** : $(1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha\, u_n$
- $\arccos(u_n) \sim \frac{\pi}{2}$
- $\arcsin(u_n) \sim u_n$ et $\arctan(u_n) \sim u_n$

## NOUVEAU COURS :

### • Limites et continuité

**I - Limite d'une fonction et continuité**

- Notion de voisinage
- Définition limite (finie ou infinie) en un point (fini ou infini)
- Unicité de la limite.
- Toute fonction admettant une limite finie en un point est bornée au voisinage de ce point.
- Continuité en un point.
- Image d'une suite par une fonction, caractérisation séquentielle de la limite, de la continuité en un point.
  Appl : comment montrer qu'une fonction n'a pas de limite en un point.
- Limite ou continuité à droite ou à gauche.

**II - Règles de calculs**

- Produit d'une fonction bornée au voisinage de a par une fonction tendant vers 0 en a.
- Opérations sur les limites : opérations algébriques et composition.
- Limite et ordre : signe et théorème d'encadrement dit des gendarmes.
- Théorème de la limite monotone.

**III - Continuité sur un intervalle**

- Définition, opérations sur les fonctions continues.
- Restriction et prolongement de fonctions continues, prolongement par continuité en un point.
- Image d'un intervalle par une fonction continue, théorème des valeurs intermédiaires, cas d'une fonction continue sur un **segment** de $\mathbb{R}$ (th des bornes atteintes).
- Bijection réciproque d'une fonction continue strictement monotone.

**IV - Extension aux fonctions à valeurs complexes**

- Limite en un point, continuité, traduction à l'aide des parties réelle et imaginaire.

Rq. pour les interrogateurs : nous n'avons, pour le moment, pas fait d'exercices sur la continuité sur un intervalle mais les th/prop doivent être connus.

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 15 : Dérivabilité

### Déroulement d'une colle

1. Un cas parmi les 9 possibles de définition de $f(x) \to L$ quand $x \to a$.
2. Citer un théorème du chapitre « Limites et continuité »
3. Un calcul de limite en utilisant les équivalents
4. Exercice(s)

Un cours non connu entraine une note < 10.

Un cours non connu entraine une note < 10.

# Semaine de colles n°14 du 20/01/25 au 24/01/25 - Exercices à savoir refaire

## Exercices Chap. 11

**Exercice 2 :**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite réelle à valeurs entières. Prouver qu'elle est convergente si et seulement si elle est stationnaire.

**Exercice 5 :**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

**Exercice 6 :** ***Théorème de Cesàro.***
On considère $(u_n)$ une suite convergente de limite $\ell \in \mathbb{R}$. On définit $(v_n)$ par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ .

**1.** Dans cette question, on suppose que $\ell = 0$.

**a.** Soit $\varepsilon > 0$. On fixe un entier N non nul tel que $n \geq N$ implique que $|u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. *(On pensera à justifier l'existence de N)*

Démontrer que pour tout $n \geq N$, $|v_n| \leq \dfrac{|u_1| + \ldots + |u_{N-1}|}{n} + \dfrac{\varepsilon}{2}$.

**b.** En déduire qu'il existe un entier N′ non nul tel que $n \geq N'$ implique que $|v_n| \leq \varepsilon$.

**c.** Conclure que $(v_n)$ est convergente vers 0.

**2.** En vous ramenant au cas précédent, démontrer que la propriété est encore valable si $\ell$ est un réel quelconque.

**Exercice 8 :**
Pour tout entier naturel $n$ non nul, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$. Que peut-on en déduire ?

**Exercice 9 :**
On cherche à montrer que la suite $(\cos n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente. Par l'absurde, on suppose qu'elle est convergente vers une limite $\ell$.
**1.** En calculant la limite de la suite extraite $(\cos(2n))_{n\in\mathbb{N}}$ de deux façons différentes, en déduire les valeurs que peut prendre $\ell$.
**2.** Calculer la limite de la suite $(\cos(n+1) + \cos(n-1))_{n\in\mathbb{N}}$ de deux façons différentes, en fonction de $\ell$.
**3.** Conclure.

**Exercice 12 :** Calculer, si elles existent, les limites des suites suivantes dont on donne le terme général :

**1.** $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ **2.** $u_n = \dfrac{n + (-1)^n}{n - (-1)^n}$ **5.** $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$ **6.** $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$

**7.** $u_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\lfloor kx \rfloor$, $x \in \mathbb{R}$ **11.** $u_n = 2^n \sin\dfrac{\alpha}{2^n}$, $\alpha \in \,]0, \pi[$

**Exercice 14 :** ***Suite définie implicitement.***

⚠ LA MÉTHODE POUR ÉTUDIER LE SENS DE VARIATION D'UNE SUITE DÉFINIE IMPLICITEMENT DOIT ÊTRE CONNUE.

Pour tout entier $n \geq 3$ et pour tout réel $x > 0$, on pose : $f_n(x) = x - n\ln x$. On donne : $\ln(2) \approx 0{,}7$.
**1. a.** Soit $n \geq 3$. Étudier les variations de la fonction $f_n$ sur son ensemble de définition.
**b.** Soit $n \geq 3$. Montrer qu'il existe un unique réel $x_n \in \,]1, 2[$ tel que : $f_n(x_n) = 0$.
**2. a.** Soit $n \geq 3$. Déterminer le signe de $f_n(x_{n+1})$.
En déduire que la suite $(x_n)$ est monotone et donner son sens de monotonie.
**b.** Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 3}$ est convergente.
**c.** En utilisant que pour tout entier $n \geq 3$, $f_n(x_n) = 0$, montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n = 1$.

**Exercice 18 :**
**1.** Soit $(u_n)$ une suite à termes positifs, décroissante et convergente vers 0. On définit la suite $(S_n)$ par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k$ .
Montrer que $(S_n)$ est convergente. *<u>Ind.</u> On pourra montrer que les suites extraites $(S_{2n})$ et $(S_{2n+1})$ sont adjacentes.*
**2.** Montrer que $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}\right)_{n\geq 1}$ converge et déterminer sa limite. *<u>Ind.</u> On pourra utiliser que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k} = \displaystyle\int_0^1 t^{k-1}dt$.*

## Exercices Chap. 12

**Exercice : ex 8 chap. 11 + 3 chap. 12**
**0.** Pour tout entier naturel $n$ non nul, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$. Que peut-on en déduire ?
**1.** Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \dfrac{1}{k}$.
**2.** En déduire que : $\forall n \geq 2$ $u_n - 1 \leq \ln(n) \leq u_n - \dfrac{1}{n}$.
**3.** En déduire que $u_n$ est équivalent à $\ln(n)$ quand $n$ tend vers $+\infty$ .
**4.** On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = u_n - \ln n$. Montrer que $(x_n)$ est convergente. On note $\gamma$ cette limite, c'est la *<u>constante d'Euler</u>*.

**Exercice 5 :**
Déterminer, si elles existent, les limites des suites dont on donne le terme général ci-dessous :

**1.** $u_n = n\ln\left(\sqrt{\dfrac{n+1}{n-1}}\right)$ **2.** $u_n = \sqrt{n}\sin\left(\dfrac{1}{\ln(n)}\right)$ **3.** $u_n = n\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)$ **4.** $u_n = \sqrt{n^2 + 36n + 12} - n$

**5.** $u_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$ **6.** $u_n = n\left(\sin\dfrac{1}{n} - \tan\dfrac{1}{2n}\right)$ **7.** $u_n = \left(2\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) + \cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^n$ **8.** $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)^{n^2}$

## Exercices Chap. 13

**Exercice 4 :**
Étudier la limite en 0 des fonctions $f : x \longmapsto \dfrac{x}{a}\left\lfloor\dfrac{b}{x}\right\rfloor$ et de $g : x \longmapsto \dfrac{a}{x}\left\lfloor\dfrac{x}{b}\right\rfloor$ où $a$ et $b$ sont deux réels strictement positifs.

**Exercice 5 :**
Déterminer, si elles existent, les limites de $f$ en $a$.

**a.** $f : x \longmapsto e^{-x}\cos x$ en $a = +\infty$, puis $a = -\infty$. **b.** $f : x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x}$ en $a = 0$

**c.** $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}$ en $a = 1$ **d.** $f : x \longmapsto \dfrac{x^2 - 2x - 3}{\sqrt{x+1}}$ en $a = -1$

**Exercice 9 :**
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue en 0 et en 1, telle que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x^2) = f(x)$. Montrer que $f$ est constante.

**Exercice 12 :**
**1.** Étudier la continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$ .