# Semaine de colles n°15 du 27/01/25 au 31/01/25

## Du programme précédent :

- **Limites et continuité**

**I – Limite d'une fonction et continuité**

- Notion de voisinage
- Définition limite (finie ou infinie) en un point (fini ou infini)
- Unicité de la limite.
- Toute fonction admettant une limite finie en un point est bornée au voisinage de ce point.
- Continuité en un point.
- Image d'une suite par une fonction, caractérisation séquentielle de la limite, de la continuité en un point.
  Appl : comment montrer qu'une fonction n'a pas de limite en un point.
- Limite ou continuité à droite ou à gauche.

**II – Règles de calculs**

- Produit d'une fonction bornée au voisinage de a par une fonction tendant vers 0 en a.
- Opérations sur les limites : opérations algébriques et composition.
- Limite et ordre : signe et théorème d'encadrement dit des gendarmes.
- Théorème de la limite monotone.

**III – Continuité sur un intervalle**

- Définition, opérations sur les fonctions continues.
- Restriction et prolongement de fonctions continues, prolongement par continuité en un point.
- Image d'un intervalle par une fonction continue, théorème des valeurs intermédiaires, cas d'une fonction continue sur un **segment** de $\mathbb{R}$ (th des bornes atteintes).
- Bijection réciproque d'une fonction continue strictement monotone.

**IV – Extension aux fonctions à valeurs complexes**

- Limite en un point, continuité, traduction à l'aide des parties réelle et imaginaire.

## Nouveau cours :

- **Systèmes linéaires – Méthode du pivot**

Rq pour les interrogateurs : le but de ce chapitre est de savoir appliquer l'algorithme de Gauss sur des systèmes de taille raisonnable, avec ou sans paramètre.

**I – Généralités**

- Équation linéaire, systèmes linéaires, système homogène, compatible/incompatible, système de Cramer.
- Forme de l'ensemble des solutions
- Interprétation géométrique dans le cas de systèmes à deux ou trois équations ou deux ou trois inconnues.

**II – Méthode du pivot**

- Définition des opérations élémentaires sur les lignes d'un système linéaire
- Si on applique à un système linéaire (S) une suite d'opérations élémentaires sur les lignes, on obtient un autre système linéaire (S') équivalent à (S), c'est-à-dire ayant le même ensemble de solutions.
- Systèmes échelonnés : définition, pivot, rang du système, relations de compatibilité
- Algorithme de Gauss

**(*)** Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 16 : Calcul matriciel

### Déroulement d'une colle

1. Un cas parmi les 9 possibles de définition de $f(x) \to L$ quand $x \to a$.
2. Résolution d'un système linéaire (avec ou sans paramètre, de taille raisonnable) en utilisant l'algorithme de Gauss
3. Exercice(s)

Un cours non connu entraine une note < 10.

# Semaine de colles n°15 du 27/01/25 au 31/01/25 - Exercices à savoir refaire

## Exercices Chap. 13

**Exercice 4 :**

Étudier la limite en 0 des fonctions $f : x \longmapsto \dfrac{x}{a}\left\lfloor \dfrac{b}{x} \right\rfloor$ et de $g : x \longmapsto \dfrac{a}{x}\left\lfloor \dfrac{x}{b} \right\rfloor$ où $a$ et $b$ sont deux réels strictement positifs.

**Exercice 5 :**
Déterminer, si elles existent, les limites de $f$ en $a$.

**a.** $f : x \longmapsto e^{-x}\cos x$ en $a = +\infty$, puis $a = -\infty$.

**b.** $f : x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$ en $a = 0$

**c.** $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}$ en $a = 1$

**d.** $f : x \longmapsto \dfrac{x^2-2x-3}{\sqrt{x+1}}$ en $a = -1$

**Exercice 6 :**
Est-ce que les fonctions suivantes sont continues en 0 ? Prolongeables par continuité en 0 ?

**1.** $f_1 : x \longmapsto \dfrac{\tan 3x}{x}$

**2.** $f_2 : x \longmapsto \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x}$

**3.** $f_3 : x \longmapsto \exp\dfrac{1}{x}$

**4.** $f_4 : x \longmapsto \begin{cases} (1+x)^{1/x} & \text{si } x \in\ ]-1,+\infty[\ \setminus \{0\} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

**5.** $f_5 : x \longmapsto \cos\dfrac{1}{x}$

**6.** $f_6 : x \longmapsto \sin x \cos\dfrac{1}{x}$

**Exercice 9 :**
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue en 0 et en 1, telle que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x^2) = f(x)$. Montrer que $f$ est constante.

**Exercice 9 :**
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue en 0 et en 1, telle que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x^2) = f(x)$. Montrer que $f$ est constante.

**Exercice 12 :**

**1.** Étudier la continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f$ définie par : $\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$.

**Exercice 22 :**
Soit $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ continue.
**1.** Démontrer que $f$ admet un point fixe c'est-à-dire : $\exists\ c \in [a, b], f(c) = c$.
**2.** Prouver que ce point fixe est unique dans les deux cas suivants :
**a.** $f$ est décroissante sur $[a, b]$.
**b.** $f$ est $k$-lipschitzienne sur $[a, b]$ avec $0 < k < 1$.

**Exercice 26 :**

Soit $f$ continue et positive sur $\mathbb{R}^+$. On suppose que $x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$ admet une limite $\ell < 1$ en $+\infty$.

Montrer que $f$ admet au moins un point fixe.

**Exercice 29 :** *Équation fonctionnelle.*
Démontrer que l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que : $\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y)$, est égal à l'ensemble des homothéties de $\mathbb{R}$