Semaine de colles n°16 du 03/02/25 au 07/02/25

Du programme précédent :

- **Systèmes linéaires – Méthode du pivot**

Rq pour les interrogateurs : le but de ce chapitre est de savoir appliquer l'algorithme de Gauss sur des systèmes de taille raisonnable, avec ou sans paramètre.

I – Généralités
- Équation linéaire, systèmes linéaires, système homogène, compatible/incompatible, système de Cramer.
- Forme de l'ensemble des solutions
- Interprétation géométrique dans le cas de systèmes à deux ou trois équations ou deux ou trois inconnues.

II – Méthode du pivot
- Définition des opérations élémentaires sur les lignes d'un système linéaire
- Si on applique à un système linéaire (S) une suite d'opérations élémentaires sur les lignes, on obtient un autre système linéaire (S') équivalent à (S), c'est-à-dire ayant le même ensemble de solutions.
- Systèmes échelonnés : définition, pivot, rang du système, relations de compatibilité
- Algorithme de Gauss

Nouveau cours :

- **Calcul matriciel**

I – Matrices à coefficients dans K
- Définition, opérations : somme, multiplication par un scalaire, propriétés de calcul, combinaison linéaire.
- Décomposition comme combinaison linéaire des matrices élémentaires.
- Transposition, notation A^T.

II – Produit de matrices
- Définition, propriétés de calcul. Le produit matriciel N'EST PAS COMMUTATIF.
- Lignes et colonnes d'une matrice :

• Si X est une matrice colonne alors AX est une combinaison linéaire des colonnes de A.
• $C_j(AB) = A \times C_j(B)$ et $L_i(AB) = L_i(A) \times B$.

- Écriture matricielle d'un système linéaire

III - Les matrices carrées
- Définition de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le produit matriciel est une loi interne dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Définition d'une puissance entière de matrice, propriétés.
- **Si A et B commutent,** on peut utiliser : Le binôme de Newton et la formule de Bernoulli $A^n - B^n = \ldots$

Exemples : Calcul de J^k où $J = (1)_{1 \le i, j \le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ **(*)** Calcul de A^k où $A = \begin{pmatrix} 2 & & (5) \\ & \ddots & \\ (5) & & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ **(*)**

- Matrices carrées particulières : diagonales, scalaires, triangulaires, symétriques et antisymétriques

Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure et expression des coefficients diagonaux. **(*)**

IV - Matrices carrées inversibles
- Définition, cas des matrices ayant une ligne/colonne nulle, cas des matrices diagonales.
- Inverse d'un produit, d'une transposée, d'une puissance entière

V – Opérations élémentaires sur les matrices
- Opérations élémentaires sur les lignes : permutation, dilatation, transvection.
- Matrices des O.E.L, interprétation en termes de produits matriciels.
- Matrices des O.E.L sont inversibles, les O.E.L. préservent l'inversibilité
- Cas des matrices ayant deux lignes/colonnes proportionnelles
- Opérations élémentaires sur les colonnes

VI – Algorithme du pivot de Gauss et caractérisations des matrices inversibles
- Si A est inversible, l'algorithme du pivot de Gauss permet, par une suite finie d'O.E.L., de transformer A en une matrice ayant *n* pivots / en I_n.
- Caractérisation des matrices inversibles :

> Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il y a équivalence entre les propositions suivantes :
> **1.** A est inversible.
> **2.** $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $BA = I_n$
> **3.** Le système $AX = 0_{n,1}$ admet une unique solution (c'est la solution nulle).
> **4.** Il existe une suite finie O.E.L. permettant de transformer A en une matrice ayant *n* pivots.
> **5.** Il existe une suite finie O.E.L permettant de transformer A en I_n.

- Inversibilité à droite et à gauche
- Calcul pratique de l'inverse en utilisant l'algorithme de Gauss :

Si A est inversible, il existe une suite finie d'O.E.L. qui transforme A en I_n. La même suite d'O.E.L. transforme I_n en A^{-1}. Idem avec OEL **mais on ne mélange pas les deux**.

- Calcul pratique de l'inverse par résolution de système linéaire :

A est inversible $\Leftrightarrow$ Pour tout $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ a une unique solution (qui est alors $X = A^{-1}B$)

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 17 : Dérivabilité

Déroulement d'une colle

1. Une ou deux questions parmi celles signalées par (*)
   Ou Résolution d'un système linéaire (avec ou sans paramètre, de taille raisonnable) en utilisant l'algorithme de Gauss
   Ou Calcul de l'inverse d'une matrice carrée d'ordre 3
2. Exercice(s)

Un cours non connu entraine une note < 10.

Semaine de colles n°16 du 03/02/25 au 07/02/25 - Exercices à savoir refaire

Exercices Chap. 15

★ Méthodes à connaitre pour calculer les puissances d'une matrice A :

• A connaitre : Si $J = (1)_{1\le i,j\le n}$ alors on a : $\forall k \in \mathbb{N},\ J^k = \begin{cases} I_n & \text{si } k=0 \\ n^{k-1}J & \text{si } k\in\mathbb{N}^* \end{cases}$ (à savoir démontrer)

Si $A = \mathrm{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ alors on a : $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ A^p = \mathrm{diag}(\alpha_1^{\,p}, \dots, \alpha_n^{\,p})$

• Utilisation d'un raisonnement par récurrence

Mth : On calcule $A^2, A^3, \dots$.
On conjecture l'expression de A^n en fonction de n.
On démontre proprement cette conjecture par récurrence.

• Utilisation de suites récurrentes

Mth : $\boxed{\text{SI}}$ A^2 s'écrit comme combinaison linéaire de A et I_3, on peut :

1) Montrer qu'il existe deux suites (u_n) et (v_n) vérifiant : $\forall n\in\mathbb{N},\ A^n = u_n A + v_n I_3$
2) Calculer u_n et v_n en fonction n et en déduire une expression de A^n, pour $n\in\mathbb{N}$.

• Utilisation du binôme de Newton

Mth : On cherche à écrire A sous la forme A = M + N avec M et N qui **COMMUTENT** et telles que l'on sache calculer leurs puissances successives.
Une des deux matrices est souvent αI_n avec $\alpha\in\mathbb{K}$ car αI_n commute avec toutes matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 2 :

Soit $J = (1)_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de terme général égal à 1.

Montrer que : $\forall A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ JAJ = s(A)J$ où $s(A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ est la somme de tous les termes de A.

Exercice 5 :

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Exprimer A^2 comme combinaison linéaire de A et I_3.

2. Montrer qu'il existe deux suites (u_n) et (v_n) vérifiant : $\forall n\in\mathbb{N},\ A^n = u_n A + v_n I_3$.

3. Calculer u_n et v_n en fonction n et en déduire une expression de A^n, pour $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 7 :

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On pose $B = A - I_3$. Pour $n\in\mathbb{N}$, calculer B^n et en déduire l'expression de A^n.

Exercice 12 :

Soit (x_n), (y_n) et (z_n) trois suites réelles définies par leurs premiers termes x_0, y_0 et z_0 et les relations de récurrence :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \begin{cases} x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{6}y_n + \frac{1}{6}z_n \\ y_{n+1} = \frac{1}{6}x_n + \frac{2}{3}y_n + \frac{1}{6}z_n \\ z_{n+1} = \frac{1}{6}x_n + \frac{1}{6}y_n + \frac{2}{3}z_n \end{cases}$$

Déterminer x_n, y_n et z_n en fonction de n, x_0, y_0 et z_0, puis étudier la convergence de ces trois suites.

Exercice 37 :

Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
Est-ce que cette écriture est unique ?