Semaine de colles n°17 du 10/02/25 au 14/02/25

DU PROGRAMME PRÉCÉDENT :

- **Calcul matriciel**

I – Matrices à coefficients dans K

- Définition, opérations : somme, multiplication par un scalaire, propriétés de calcul, combinaison linéaire.
- Décomposition comme combinaison linéaire des matrices élémentaires.
- Transposition, notation A^T.

II – Produit de matrices

- Définition, propriétés de calcul. Le produit matriciel N'EST PAS COMMUTATIF.
- Lignes et colonnes d'une matrice :

• Si X est une matrice colonne alors AX est une combinaison linéaire des colonnes de A.

• $C_j(AB) = A \times C_j(B)$ et $L_i(AB) = L_i(A) \times B$.

- Écriture matricielle d'un système linéaire

III – Les matrices carrées

- Définition de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le produit matriciel est une loi interne dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Définition d'une puissance entière de matrice, propriétés.
- **Si A et B commutent,** on peut utiliser : Le binôme de Newton et la formule de Bernoulli $A^n - B^n = \ldots$

Exemples : Calcul de J^k où $J = (1)_{1 \le i, j \le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ***(*)*** Calcul de A^k où $A = \begin{pmatrix} 2 & & (5) \\ & \ddots & \\ (5) & & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ***(*)***

- Matrices carrées particulières : diagonales, scalaires, triangulaires, symétriques et antisymétriques

Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure et expression des coefficients diagonaux. ***(*)***

IV - Matrices carrées inversibles

- Définition, cas des matrices ayant une ligne/colonne nulle, cas des matrices diagonales.
- Inverse d'un produit, d'une transposée, d'une puissance entière

V – Opérations élémentaires sur les matrices

- Opérations élémentaires sur les lignes : permutation, dilatation, transvection.
- Matrices des O.E.L, interprétation en termes de produits matriciels.
- Matrices des O.E.L sont inversibles, les O.E.L. préservent l'inversibilité
- Cas des matrices ayant deux lignes/colonnes proportionnelles
- Opérations élémentaires sur les colonnes

VI – Algorithme du pivot de Gauss et caractérisations des matrices inversibles

- Si A est inversible, l'algorithme du pivot de Gauss permet, par une suite finie d'O.E.L., de transformer A en une matrice ayant *n* pivots / en I_n.
- Caractérisation des matrices inversibles :

> Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il y a équivalence entre les propositions suivantes :
>
> **1.** A est inversible.
>
> **2.** $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), BA = I_n$
>
> **3.** Le système $AX = 0_{n,1}$ admet une unique solution (c'est la solution nulle).
>
> **4.** Il existe une suite finie O.E.L. permettant de transformer A en une matrice ayant *n* pivots.
>
> **5.** Il existe une suite finie O.E.L permettant de transformer A en I_n.

- Inversibilité à droite et à gauche
- Calcul pratique de l'inverse en utilisant l'algorithme de Gauss :

Si A est inversible, il existe une suite finie d'O.E.L. qui transforme A en I_n. La même suite d'O.E.L. transforme I_n en A^{-1}. Idem avec OEL **mais on ne mélange pas les deux**.

- Calcul pratique de l'inverse par résolution de système linéaire :

A est inversible $\Leftrightarrow$ Pour tout $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ a une unique solution (qui est alors $X = A^{-1}B$)

NOUVEAU COURS :

- **Dérivation des fonctions à valeurs réelles**

I – Fonctions dérivables

- Dérivabilité en un point : nombre dérivé, interprétation graphique, dérivabilité à droite/gauche
- f est dérivable en $a \in I \Leftrightarrow$ Il existe $\beta \in \mathbb{R}$ et ε définie sur I tels que :

$$\forall x \in I, f(x) = f(a) + (x-a)\,\beta + (x-a)\,\varepsilon(x) \text{ et } \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0 \quad (\text{et alors } \beta = f'(a))$$ ***(*)***.

- Dérivabilité globale, fonction dérivée, « dérivable $\Rightarrow$ continue ».

II – Opérations sur les dérivées

- Opérations algébriques, composition, dérivation d'une bijection réciproque.

III – Dérivations successives

- Définition, opérations sur les fonctions n fois dérivable, classe d'une fonction.

Ex. Dérivée n-ième de $x \longmapsto x^\alpha$, $x \longmapsto x^n$, $x \longmapsto e^{\alpha}$, $x \longmapsto \cos x$, $x \longmapsto \sin x$, $x \longmapsto \dfrac{1}{x+a}$, $x \longmapsto \ln|x-a|$ ***(*) Résultats à connaitre et à savoir démontrer (Savoir faire les récurrences même non faites en cours)***

- Formule de Leibniz, ex. calcul de la dérivée n-ième de $x \longmapsto (x^2 + 3x + 1)e^{2x}$

IV – Propriétés des fonctions dérivables

- Extremum local en un point intérieur à I.
- Théorème de Rolle ***(*)***, Th. des accroissements finis ***(*)***, Inégalités des accroissements finis.

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 18 : Dérivabilité (fin) + Suites vérifiant une relation de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

Déroulement d'une colle

1. Une ou deux questions parmi celles signalées par (*)
2. Exercice(s)

Un cours non connu entraine une note < 10.

Semaine de colles n°17 du 10/02/25 au 14/02/25 - Exercices à savoir refaire

Exercices Chap. 15

Méthodes à connaitre :

★Comment calculer les puissances d'une matrice A ?

• A connaitre : Si $J = (1)_{1 \le i, j \le n}$ alors on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $J^k = \begin{cases} I_n & \text{si } k = 0 \\ n^{k-1} J & \text{si } k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

Si $A = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ alors on a : $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $A^p = \text{diag}(\alpha_1{}^p, \dots, \alpha_n{}^p)$

• Utilisation d'un raisonnement par récurrence : Calcul des 1^{ieres} puissances, conjecture, démonstration par récurrence

• Utilisation de suites récurrentes

Mth : $\boxed{\text{SI}}$ A^2 s'écrit comme combinaison linéaire de A et I_3, on peut :

1) Montrer qu'il existe deux suites (u_n) et (v_n) vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = u_n A + v_n I_3$
2) Calculer u_n et v_n en fonction n et en déduire une expression de A^n, pour $n \in \mathbb{N}$.

• Utilisation du binôme de Newton

Mth : A = M + N avec M et N qui **COMMUTENT** et on sait calculer leurs puissances
Une des deux matrices est souvent $\alpha\, I_n$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$ car $\alpha\, I_n$ commute avec toutes matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

★ Comment montrer que A est inversible (sans calculer son inverse) ?

Rq. Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ comportant une ligne ou une colonne nulle n'est pas inversible.

Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ayant deux lignes ou deux colonnes proportionnelles n'est pas inversible.

Mth : Dans la pratique, pour montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, est inversible, **il suffit** de montrer qu'il existe une suite finie O.E.L. permettant de transformer A en une matrice ayant ***n* pivots**.

Mth : Pour montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, est inversible, **il suffit** de montrer que le système $AX = 0_{n,1}$ admet une unique solution (qui est la solution nulle)

★ Comment montrer que A est inversible et calculer A^{-1} ?

• Utilisation d'une relation en I, A, A^2 : On se ramène à une égalité de la forme : $A \times (\underbrace{\dots}_{A^{-1}}) = I_n$

• Utilisation d'OEL (ou O.E.C) pour montrer qu'il existe une suite finie O.E.L permettant de transformer A en I_n. La même suite d'O.E.L. transforme I_n en A^{-1}

• Résolution d'un système linéaire : A est inversible $\Leftrightarrow$ Pour tout $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système AX = B a une unique solution.
Cette solution est alors : $X = A^{-1}B$

Exercice 2 :
Soit $J = (1)_{1 \le i, j \le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de terme général égal à 1.

Montrer que : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $J A J = s(A)\, J$ où $s(A) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ est la somme de tous les termes de A.

Exercice 12 :
Soit (x_n), (y_n) et (z_n) trois suites réelles définies par leurs premiers termes x_0, y_0 et z_0 et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = \frac{2}{3} x_n + \frac{1}{6} y_n + \frac{1}{6} z_n \\ y_{n+1} = \frac{1}{6} x_n + \frac{2}{3} y_n + \frac{1}{6} z_n \\ z_{n+1} = \frac{1}{6} x_n + \frac{1}{6} y_n + \frac{2}{3} z_n \end{cases}$$

Déterminer x_n , y_n et z_n en fonction de n, x_0, y_0 et z_0, puis étudier la convergence de ces trois suites.

Exercice 20 :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, nilpotente ($\exists\, p \in \mathbb{N}$, $A^p = 0_n$). Montrer que $I_n - A$ est inversible et préciser son inverse.

Exercice 29 :
Soit A = … et P = … .
1. Montrer que la matrice P est inversible et calculer P^{-1}.
2. On pose : $D = P^{-1} A\, P$. Déterminer D^n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
4. Application à un système de suites récurrentes.

Exercice 33 :
Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, MA = AM.
Ind. Quel est l'effet de la multiplication à droite ou à gauche de M par $E_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 37 :
Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
Est-ce que cette écriture est unique ?

Exercices Chap. 16

Exercice 2 :
1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable en $a \in \mathbb{R}$. Étudier l'existence et la valeur de la limite de $\dfrac{x f(a) - a f(x)}{x - a}$ quand x tend vers a.

2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable en $a \in \mathbb{R}$. Étudier l'existence et la valeur de la limite de $\dfrac{f(a+h) - f(a-h)}{h}$ quand h tend vers 0.

Exercice 10 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer, si elle existe, la dérivée $n^{\text{ième}}$ des fonctions suivantes :

1. $f : x \longmapsto (x^2 + 1)e^{2x}$ définie sur $\mathbb{R}$ **2.** $f : x \longmapsto \sin x\, e^x$ définie sur $\mathbb{R}$

4. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{3x-1}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1/3\}$ **5.** $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

Exercice 12 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $f_n : x \longmapsto x^{n-1} \ln x$ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer que : $\forall x > 0$, $f_n^{(n)}(x) = \dfrac{(n-1)!}{x}$.

Exercice 13 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $f : x \longmapsto x^n(1+x)^n$ définie sur $\mathbb{R}$.
1. En utilisant la formule de Leibniz, déterminer, après avoir justifié son existence, la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f.
2. En utilisant la formule du binôme de Newton, déterminer, une autre expression de la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f.
3. En déduire la valeur de : $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.