Semaine de colles n°18 du 03/03/25 au 07/03/25

Du programme précédent :

- **Dérivation des fonctions à valeurs réelles**

I – Fonctions dérivables

- Dérivabilité en un point : nombre dérivé, interprétation graphique, dérivabilité à droite/gauche
- f est dérivable en $a \in$ I ⇔ Il existe $\beta \in \mathbb{R}$ et ε définie sur I tels que :

$$\forall x \in I, f(x) = f(a) + (x-a)\,\beta + (x-a)\,\varepsilon(x) \text{ et } \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0 \quad (\text{et alors } \beta = f'(a))$$ **(*)**.

- Dérivabilité globale, fonction dérivée, « dérivable ⇒ continue ».

II – Opérations sur les dérivées

- Opérations algébriques, composition, dérivation d'une bijection réciproque.

III – Dérivations successives

- Définition, opérations sur les fonctions n fois dérivable, classe d'une fonction.

Ex. Dérivée n-ième de $x \longmapsto x^{\alpha}$, $x \longmapsto x^n$, $x \longmapsto e^{\alpha}$, $x \longmapsto \cos x$, $x \longmapsto \sin x$, $x \longmapsto \dfrac{1}{x+a}$, $x \longmapsto \ln|x-a|$ ***(*) Résultats à connaitre et à savoir démontrer (Savoir faire les récurrences même non faites en cours)***

- Formule de Leibniz, ex. calcul de la dérivée n-ième de $x \longmapsto (x^2 + 3x + 1)e^{2x}$

IV – Propriétés des fonctions dérivables

- Extremum local en un point intérieur à I.
- Théorème de Rolle *(*)*, Th. des accroissements finis *(*)*, Inégalités des accroissements finis.

Nouveau cours :

- **Dérivation des fonctions à valeurs réelles**

IV – Propriétés des fonctions dérivables

- Obtention de la dérivabilité par limite de la dérivée.
- Sens de variations pour une fonction dérivable sur un intervalle et cas de la stricte monotonie.

V – Fonctions convexes

- Paramétrage d'un segment, définition d'une fonction convexe/concave
- Position de la courbe représentatives par rapports à ses cordes
- Cas des fonctions dérivables, position de la courbe représentative par rapport à ses tangentes
- Cas des fonctions deux fois dérivable
- Inégalités classiques de convexité :

$$\forall u \in]-1, +\infty[, \ln(1+u) \le u \qquad \forall x \in \mathbb{R}, e^x \ge 1 + x. \qquad \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \frac{2}{\pi}x \le \sin x \le x.$$

VI – Extension aux fonctions à valeurs complexes

⚠ Les th. de Rolle et des accroissements finis ne s'étendent pas aux fonctions à valeurs complexes.

- **Compléments de cours : suites vérifiant une relation de récurrence du type** $u_{n+1} = f(u_n)$

I – Généralités

- Si I intervalle $\mathbb{R}$ stable par f alors le système $\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ définit une unique suite (u_n).
- Valeurs éventuelles de la limite si f continue sur I (point(s) fixe(s) de f).

II – Cas d'une fonction contractante

- Définition fonction contractante (k-lipschitzienne avec 0 < k < 1), unicité du point fixe (s'il existe) et convergence de (u_n). Cette propriété est à redémontrer **proprement** à chaque utilisation.
- Utilisation l'inégalité des accroissements finis pour montrer qu'une fonction est contractante.

III – Cas d'une fonction monotone

- Si f est croissante alors (u_n) est monotone.et son sens de monotonie est donné par le signe de $u_1 - u_0$
- Si f est décroissante alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de monotonies contraires.

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 19 : Espaces vectoriels

Déroulement d'une colle

1. Une question parmi celles signalées par (*)
2. Exercice(s)

Un cours non connu entraine une note < 10.

Semaine de colles n°18 du 03/03/25 au 07/03/25 - Exercices à savoir refaire

Exercices Chap. 16

Exercice 2 :

1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable en $a \in \mathbb{R}$. Étudier l'existence et la valeur de la limite de $\dfrac{x\,f(a) - a\,f(x)}{x-a}$ quand x tend vers a.

2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable en $a \in \mathbb{R}$. Étudier l'existence et la valeur de la limite de $\dfrac{f(a+h) - f(a-h)}{h}$ quand h tend vers 0.

Exercice 10 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer, si elle existe, la dérivée $n^{\text{ième}}$ des fonctions suivantes :

1. $f : x \longmapsto (x^2+1)e^{2x}$ définie sur $\mathbb{R}$ **2.** $f : x \longmapsto \sin x\, e^x$ définie sur $\mathbb{R}$

4. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{3x-1}$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1/3\}$ **5.** $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus\{-1, 1\}$

Exercice 12 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $f_n : x \longmapsto x^{n-1}\ln x$ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer que : $\forall\, x > 0,\ f_n^{(n)}(x) = \dfrac{(n-1)!}{x}$.

Exercice 13 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $f : x \longmapsto x^n(1+x)^n$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. En utilisant la formule de Leibniz, déterminer, après avoir justifié son existence, la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f.

2. En utilisant la formule du binôme de Newton, déterminer, une autre expression de la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f.

3. En déduire la valeur de : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Exercice 18 : *Généralisation du théorème de Rolle sur un intervalle non borné.*

Soit a un réel et f une fonction définie et continue sur $[a, +\infty[$ et dérivable sur $]a, +\infty[$.

Montrer que si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = f(a) \in \mathbb{R}$ alors il existe un réel c dans $]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

Ind. Utiliser la fonction $g : t \longmapsto f\left(\dfrac{1}{t} + a - 1\right)$ *définie sur* $]0, 1]$.

Exercice 21 :

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, a+2h]$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^{+*}$.

Montrer que : $\exists\, c \in\ ]a, a+2h[,\ f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a) = h^2 f''(c)$.

<u>Ind</u>. On pourra introduire : $\varphi : x \longmapsto f(x+h) - f(x)$.

Exercice 26 : *Formule de Taylor Lagrange à l'ordre* 2.

Soit $f \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$ avec $a < b$. Montrer que : $\exists\, c \in\ ]a, b[,\ f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \dfrac{(b-a)^2}{2} f''(c)$.

Exercice 29 : ***Inégalités de convexité.***

1. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, x \geq -1, (1+x)^n \geq 1 + nx$.

2. On considère p et q deux réels, strictement supérieurs à 1 tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Montrer que : $\forall\, (x, y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, xy \leq \dfrac{1}{p}x^p + \dfrac{1}{q}y^q$.

3. a. Montrer que $f :]1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = -\ln(\ln x)$ est convexe sur son ensemble de définition.

b. En déduire que : $\forall\, (x, y) \in\ ]1, +\infty[^2,\ \ln\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln x \ln y}$.

Exercices Chap. 16 – Bis - Suites récurrentes

Exercice 2 : Étudier, selon la valeur de u_0, la nature des suites suivantes :

1. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2+u_n} \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} u_0 \geq 0 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{4}u_n^2 \end{cases}$