Semaine de colles n°19 du 10/03/25 au 14/03/25

Du programme précédent :

• Dérivation des fonctions à valeurs réelles

I – Fonctions dérivables

II – Opérations sur les dérivées

III – Dérivations successives

IV – Propriétés des fonctions dérivables

- Extremum local en un point intérieur à I.
- Théorème de Rolle, Th. des accroissements finis, Inégalités des accroissements finis.

IV – Propriétés des fonctions dérivables

- Obtention de la dérivabilité par limite de la dérivée.
- Sens de variations pour une fonction dérivable sur un intervalle et cas de la stricte monotonie.

V – Fonctions convexes

- Paramétrage d'un segment, définition d'une fonction convexe/concave
- Position de la courbe représentatives par rapports à ses cordes
- Cas des fonctions dérivables, position de la courbe représentative par rapport à ses tangentes
- Cas des fonctions deux fois dérivable
- Inégalités classiques de convexité :

$$\forall u \in]-1, +\infty[, \ln(1+u) \leq u \qquad \forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1+x. \qquad \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \frac{2}{\pi} x \leq \sin x \leq x.$$

VI – Extension aux fonctions à valeurs complexes

⚠ Les th. de Rolle et des accroissements finis ne s'étendent pas aux fonctions à valeurs complexes.

• Compléments de cours : suites vérifiant une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$

I – Généralités

- Si I intervalle $\mathbb{R}$ stable par f alors le système $\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ définit une unique suite (u_n).
- Valeurs éventuelles de la limite si f continue sur I (point(s) fixe(s) de f).

II – Cas d'une fonction contractante

- Définition fonction contractante (k-lipschitzienne avec 0 < k < 1), unicité du point fixe (s'il existe) et convergence de (u_n). Cette propriété est à redémontrer **proprement** à chaque utilisation.
- Utilisation l'inégalité des accroissements finis pour montrer qu'une fonction est contractante.

III – Cas d'une fonction monotone

- Si f est croissante alors (u_n) est monotone.et son sens de monotonie est donné par le signe de $u_1 - u_0$
- Si f est décroissante alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de monotonies contraires.

Nouveau cours :

• Espaces vectoriels et familles de vecteurs

I – Espace vectoriel sur K

- Définition d'un $\mathbb{K}$-ev où $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, unicité de O_E et de l'opposé d'un vecteur.

Ex. de ref. Ensemble des vecteurs du plan ou de l'espace, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $M_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathcal{F}(X, E)$ où E ev, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

- Le produit cartésien d'un nombre fini de $\mathbb{K}$-ev est un $\mathbb{K}$-ev.

Ex. pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-ev.

- Règles de calcul dans les espaces vectoriels.
- Définition d'une combinaison linéaire, vecteurs colinéaires, vecteurs coplanaires, les ev. sont stables par combinaison linéaire.

II – Sous-espaces vectoriels

- Définition, caractérisation et exemples de sev des ev de références.
- Définition du sev. engendré par une famille finie de vecteurs, l'espace $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ est, au sens de l'inclusion, le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant les vecteurs $x_1, \dots$ et x_n.

Une question de cours : donner la définition de $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ et montrer que c'est un sev de E ***(*)***

- Toute intersection de sev est un sev.
- Somme de sous-espaces vectoriels, somme directe et caractérisations.
- Cas des sous-espaces supplémentaires, notation $E = F \oplus G$, caractérisations.

Ex. fait dans le cours :

$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + 3z = 0\}$ et $G = \mathrm{vect}((1, 1, 1))$ sont deux sev supplémentaires de $\mathbb{R}^3$. ***(*)***

À savoir démontrer (cf. chapitres précédents) ***(*)***

- L'ensemble des fonctions paires et l'ensemble des fonctions impaires sont des sev supplémentaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
- L'ensemble des matrices symétriques et l'ensemble des matrices antisymétriques sont des sev supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 20 : Espaces vectoriels (fin : famille de vecteurs)

Déroulement d'une colle

1. Montrer sur un exemple que F est un sev de E (en utilisant une caractérisation des sev ou en l'écrivant comme sous espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs)
   Ou Une question signalée par (*)
2. Exercice(s) au choix de l'interrogateur. La liste des exercices à savoir refaire est donnée ci-dessous mais l'interrogateur a le choix de poser ou non un exercice de cette liste.

Un cours non connu entraine une note < 10.

Semaine de colles n°19 du 10/03/25 au 14/03/25 - Exercices à savoir refaire

Exercices Chap. 16

Exercice 18 : *Généralisation du théorème de Rolle sur un intervalle non borné.*
Soit a un réel et f une fonction définie et continue sur $[a, +\infty[$ et dérivable sur $]a, +\infty[$.
Montrer que si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = f(a) \in \mathbb{R}$ alors il existe un réel c dans $]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

Ind. Utiliser la fonction $g : t \longmapsto f\left(\frac{1}{t} + a - 1\right)$ *définie sur* $]0, 1]$.

Exercice 21 :
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, a + 2h]$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^{+*}$.
Montrer que : $\exists\, c \in\ ]a, a + 2h[,\ f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a) = h^2 f''(c)$.
Ind. On pourra introduire : $\varphi : x \longmapsto f(x+h) - f(x)$.

Exercice 26 : *Formule de Taylor Lagrange à l'ordre* 2.

Soit $f \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$ avec $a < b$. Montrer que : $\exists\, c \in\ ]a, b[,\ f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \dfrac{(b-a)^2}{2} f''(c)$.

Exercice 29 : ***Inégalités de convexité.***
1. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, x \geq -1, (1+x)^n \geq 1 + nx$.

2. On considère p et q deux réels, strictement supérieurs à 1 tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Montrer que : $\forall\, (x, y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2,\ xy \leq \dfrac{1}{p} x^p + \dfrac{1}{q} y^q$.

3. a. Montrer que $f :]1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = -\ln(\ln x)$ est convexe sur son ensemble de définition.

b. En déduire que : $\forall\, (x, y) \in\ ]1, +\infty[^2,\ \ln\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln x \ln y}$.

Exercices Chap. 16 – Bis - Suites récurrentes

Exercice 2 : Étudier, selon la valeur de u_0, la nature des suites suivantes :

1. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2 + u_n} \end{cases}$

3. $\begin{cases} u_0 \geq 0 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{4} u_n^2 \end{cases}$

Exercices Chap. 17

Exercice 3 :
Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$? *Justifier votre réponse.*
1. $A = \{(x, x, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.
2. $B = \{(x, y, z), x^2 - y^2 = 0\}$.
3. $C = \{(x, y, z), x + y = 0$ et $x + 2y + 3z = 0\}$.

Exercice 4 :
Soit $F = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y - z = 0\}$ et $G = \{(a - b, a + b, a - 3b), (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.
Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et déterminer $F \cap G$.

Exercice 8 :
Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $E = \{M \in M_n(\mathbb{R}), AM = MA\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 12 :
Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E espace vectoriel.
1. A-t-on $F \cup G$ sous espace vectoriel de E ?
2. Montrer que : $F \cup G$ sous espace vectoriel de E $\Leftrightarrow$ $F \subset G$ ou $G \subset F$

Exercice 15 :
On considère : $F = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + z = 0 \}$ et $G = \text{Vect}((1, 2, 2))$. Montrer que : $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

Exercice 17 :
Soit $F = \{ f$ de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = f'(0) = 0 \}$ et $G = \{x \longmapsto ax + b, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$
Montrer que F et G sont supplémentaires dans l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1.