

Semaine de colles n°21 du 24/03/25 au 28/03/25

DU PROGRAMME PRÉCÉDENT :• Espaces vectoriels et familles de vecteursI - Espace vectoriel sur KII - Sous-espaces vectorielsIII - Familles de vecteurs

- Familles génératrices de F sev de E : e.v. de dimension finie (existence d'une famille génératrice finie).
Ajout et suppression de vecteurs dans une famille génératrice de F.
- Familles libres/liées :
Définition, caractérisation d'une famille libre par décomposition unique des vecteurs de $\text{Vect}((x_i)_{1 \leq i \leq n})$
Caractérisation des familles liées : l'un au moins des vecteurs est combinaison linéaire des autres.
Famille libre à 1 ou 2 éléments, famille contenant 0_E , contenant deux vecteurs colinéaires, ...
- Si la famille $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est libre alors pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $\text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_k)$ et $\text{Vect}(x_{k+1}, \dots, x_n)$ sont en somme directe.
- Dans un espace vectoriel de dimension finie, le cardinal d'une famille libre est toujours inférieur ou égal à celui d'une famille génératrice du même espace.

IV - Bases et dimension d'un espace vectoriel de dimension finie

- Bases d'un espace vectoriel : définition, caractérisation par existence et unicité de la décomposition, coordonnées dans une base.
Ex. Déterminer une base d'ev tels que $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 3x - 2y + z = 0\}$ ou/et $\{(a - b, a + 2b, b - a), (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ (*)
- Caractérisation d'une base comme famille libre maximale ou génératrice minimale.
- Soit F, G sev de E, de bases respectives B_1 et B_2 .
On a : $E = F \oplus G \Leftrightarrow B = (B_1, B_2)$ base de E (base adaptée à la somme directe)
- Existence de bases : Th. de la base extraite, th. de la base incomplète.
- Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie, exemples : $\mathbb{K}^n$ et $M_{n,p}(\mathbb{K})$ et leur base canonique.
- Si E de dimension n alors : Toute famille libre de E est finie et a **au plus** n éléments
Et toute famille libre de E de n éléments est une base de E.
- Si E de dimension n alors : Toute famille génératrice de E a **au moins** n éléments
Et toute famille génératrice de E de n éléments est une base de E.

V - Sous-espaces vectoriels en dimension finie

- Dimension d'un sous-espace vectoriel de dimension finie.
- Existence de sous-espace supplémentaire d'un sev donné, dimension d'un supplémentaire.
- Formule de Grassmann (*)
- Caractérisation de s.e.v. supplémentaires dans un e.v. de dimension finie.
- Rang d'une famille de vecteurs, caractérisation des familles libres et génératrices à l'aide du rang. (*)
- Détermination pratique du rang d'une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ par la méthode du pivot de Gauss pour se ramener à une famille étagée + Présentation pratique sous forme de matricielle.

NOUVEAU COURS :I - L'ensemble $K[X]$ où $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

- Définition formelle, degré, coefficient dominant, polynômes unitaires.
- Opérations sur l'ensemble des polynômes : structure d'ev., multiplication de deux polynômes
Formule du binôme de Newton et formule de Bernoulli.
- Notation usuelle des polynômes.
- $K_n[X]$ sev. de $K[X]$ de base canonique $(1, X, \dots, X^n)$.
- Toute famille finie de polynômes non nuls et de degrés échelonnés est libre. (*)
- Composition de deux polynômes.
- Fonction polynomiale associée à un polynôme.

II - Dérivation dans $K[X]$

- Définition, propriétés, expression de la dérivé $k^{\text{ième}}$ d'un polynôme.
- Formule de Leibniz et formule de Taylor pour les polynômes.

III - Divisibilité dans $K[X]$

- Multiples et diviseurs d'un polynôme, division euclidienne, exemple pratique.

IV - Racines d'un polynôme

- Définition par divisibilité et caractérisation.
- Tout polynôme de degré $n \geq 0$ possède au plus n racines distinctes.
Si un polynôme de degré $\leq n$ admet au moins $n + 1$ racines distinctes, c'est le polynôme nul.
Ex. Trouver tous les polynômes P vérifiant : $P(X+1) = P(X)$. (*)

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !Prévisions semaine n° 21 : Polynômes (fin : ordre de multiplicité et factorisation)Déroulement d'une colle

1. Une question de cours parmi celles signalées par (*) ou une question très proche.
2. Exercice(s) au choix de l'interrogateur. La liste des exercices à savoir refaire est donnée ci-dessous mais l'interrogateur a le choix de poser ou non un exercice de cette liste.

Un cours non connu entraine une note < 10.

Exercices Chap. 17Exercice 19 :

Les vecteurs suivants forment-ils une famille libre ou liée ?

- $\vec{u} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (2, 1, 0)$, $\vec{w} = (0, -1, 2)$ dans $\mathbb{R}^3$.
- $\vec{u} = (1, 1, 1)$, $\vec{v} = (2, 1, 0)$, $\vec{w} = (0, -1, 2)$ dans $\mathbb{R}^3$.
- $f: x \mapsto \cos^2 x$, $g: x \mapsto \cos(2x)$ et $h: x \mapsto 1$ dans $\mathbb{R}$.
- $f: x \mapsto x$, $g: x \mapsto e^x$ et $h: x \mapsto xe^x$ dans $\mathbb{R}$.
- (u_n) et (v_n) avec : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n$ et $v_n = n2^n$, dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 23 :

Soit $x_1, x_2, \dots, x_n$ réels tels que : $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on définit $f_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_k(x) = |x - x_k|$.

Montrer que $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ est libre dans $C(\mathbb{R})$.

Exercice 28 :

On considère $\vec{u} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (-1, -1, 2)$ et $\vec{w} = (-2, 1, 2)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

- Montrer que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
- Quelles sont les coordonnées de $\vec{x} = (1, 1, 1)$ dans cette base ?

Exercice 34 :

Dans $E = \mathbb{R}^3$, on pose : $F = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x - y - z = 0 \text{ et } 3x - 2y + 2z = 0 \}$ et $G = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 4x + y - 2z = 0 \}$

- Montrer que F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E . Déterminer sa dimension.
- Montrer que G est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E . Déterminer sa dimension.
- Montrer que F et G sont des sous-espaces supplémentaires dans E .

Exercice 36 :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$.

On appelle *hyperplan* de E tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n - 1$.

- On considère H_1 et H_2 deux hyperplans distincts de E . Montrer que : $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2$.
- Soit H un hyperplan de E et $u \in E$ tel que $u \notin H$. Montrer que H et $\text{Vect}(u)$ sont supplémentaires dans E .

Exercice 37 :

- Dans $\mathbb{R}^3$, on pose : $\vec{u} = (a, 1, 1)$, $\vec{v} = (1, a, 1)$ et $\vec{w} = (1, 1, a)$ où $a \in \mathbb{R}$. Déterminer le rang de la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ suivant les valeurs de a .

Exercice 39 :

Déterminer le rang de la famille $\mathcal{F} = (x \mapsto e^x, x \mapsto e^{-x}, x \mapsto \text{ch } x, x \mapsto \text{sh } x)$ dans $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercices Chap. 18Exercice 4 :

Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que : $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$.

Exercice 7 :

On considère les ensembles : $E_1 = \{P \in \mathbb{R}_2[X], \tilde{P}(2) = 0\}$ et $E_2 = \{P \in \mathbb{R}[X], \tilde{P}(1) = 1\}$.

Ces ensembles sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$?

Si oui, sont-ils de dimensions finies ? Si oui, en donner une base.

Exercice 8 :

Soit $E = \mathbb{R}_5[X]$. On considère : $F = \{P \in E, P(1) = P'(0) = P(-1) = 0\}$ et $G = \text{Vect}(X^2, X(X+1), (X+1)^2)$.

- Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de dimension finie de E . Donner une base de F et une base de G .
- A-t-on $E = F \oplus G$?

Exercice 15 :

Déterminer le reste des divisions euclidiennes suivantes dans $\mathbb{R}[X]$:

- $A = X^n$ par $B = X^2 - 3X + 2$ avec $n \geq 2$
- $A = X^n$ par $B = X(X-1)^2$ avec $n \geq 3$
- $A = (X \cos \theta + \sin \theta)^n$ par $B = X^2 + 1$ avec $n \geq 2$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 19 :

Soit $n \geq 1$ et $P = nX^{n+1} - (n+1)aX^n + a^{n+1}$ où a est un réel fixé. Montrer que P est divisible par $(X-a)^2$ et donner le quotient.

Exercice 23 : Une application aux matrices.

On considère : $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$.

- Calculer $A^2 - 3A + 2I_2$.
- Soit $n \geq 2$. Déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme X^n par $X^2 - 3X + 2$.
- En déduire, A^n pour $n \geq 2$.