Semaine de colles n°22 du 31/03/25 au 04/04/25

DU PROGRAMME PRÉCÉDENT :

• Polynômes

I – L'ensemble K [X] où K = ℝ ou ℂ

- Définition formelle, degré, coefficient dominant, polynômes unitaires.
- Opérations sur l'ensemble des polynômes : structure d'ev., multiplication de deux polynômes
  Formule du binôme de Newton et formule de Bernoulli.
- Notation usuelle des polynômes.
- $K_n[X]$ sev. de K[X] de base canonique $(1, X, \dots, X^n)$.
- Toute famille finie de polynômes non nuls et de degrés échelonnés est libre. **(*)**
- Composition de deux polynômes.
- Fonction polynomiale associée à un polynôme.

II – Dérivation dans K[X]

- Définition, propriétés, expression de la dérivé $k^{\text{ième}}$ d'un polynôme.
- Formule de Leibniz et formule de Taylor pour les polynômes.

III – Divisibilité dans K[X]

- Multiples et diviseurs d'un polynôme, division euclidienne, exemple pratique.

IV – Racines d'un polynôme

- Définition par divisibilité et caractérisation.
- Tout polynôme de degré $n \geq 0$ possède au plus n racines distinctes.

Si un polynôme de degré $\leq n$ admet au moins n + 1 racines distinctes, c'est le polynôme nul.
Ex. Trouver tous les polynômes P vérifiant : P(X+1) = P(X). **(*)**

NOUVEAU COURS :

IV – Racines d'un polynôme

- Ordre de multiplicité d'une racine : définition par divisibilité et caractérisation.
- Un polynôme de degré $n \geq 0$ possède au plus n racines, comptées avec leur multiplicité.

Si un polynôme de degré $\leq n$ admet au moins n + 1 racines, comptées avec leur multiplicité, c'est le polynôme nul.

V – Factorisation dans ℂ[X] et ℝ[X]

- Polynômes irréductibles, th. de D'Alembert-Gauss, polynômes irréductibles de ℂ[X] et de ℝ[X].
- Factorisation dans ℂ[X] et dans ℝ[X].
- Ex. de factorisation dans ℝ[X] et ℂ[X] : $X^n - 1$ **(*)**

VI – Somme et produit des racines d'un polynôme

- Savoir retrouver les relations coefficients/racines pour un polynôme de degré 3.
- Somme et produit des racines d'un polynôme scindé sur 𝕂 de degré $n \geq 1$.

• Dénombrements

I – Ensembles finis

- Intervalles de ℕ, conditions sur p et n lorsqu'il existe une injection/surjection/bijection $[\![1, p]\!]$ sur $[\![1, n]\!]$.
- Définition d'un ensemble fini non vide et par convention, l'ensemble vide est fini.
- Parties d'un ensemble fini, cardinal d'une partie.
- Applications entre deux ensembles finis : Cardinal de $\mathscr{F}(E, F)$, conditions sur Card E et Card F lorsqu'il existe une injection/surjection/bijection E sur F.

Si E et F finis tels que **Card E = Card F** et $f : E \longrightarrow F$ une application alors :
f injective ⇔ f surjective ⇔ f bijective.

II – Opérations sur les ensembles finis

- Cardinal d'une réunion disjointe ou non, d'un produit cartésien.

Rq. interrogateurs : La formule du crible est H.P.

- Définition d'une partition d'un ensemble, lien avec les cardinaux.
- Parties d'un ensemble fini : nombre total de parties **(*)** Dem. par récurrence.

III – Outils pour le dénombrement

- p-listes, p-arrangements, permutations.
  Applications : dénombrement des injections et des bijections de E dans F.
- p-combinaisons, nombre de parties de cardinal p d'un ensemble E fini.
- Un exemple classique : les anagrammes **(*)** *A savoir expliquer sur des exemples.*

Rq pour les interrogateurs : Nous n'avons pas encore fait d'exercices de dénombrement.

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 23 : Dénombrement (fin) + Probabilités sur un univers fini.

Déroulement d'une colle

1. Une question de cours parmi celles signalées par (*) ou une question très proche.
2. Exercice(s) au choix de l'interrogateur **sur le chapitre « Polynômes ».**
   La liste des exercices à savoir refaire est donnée ci-dessous mais l'interrogateur a le choix de poser ou non un exercice de cette liste.

Un cours non connu entraine une note < 10.

Semaine de colles n°22 du 31/03/25 au 04/04/25 - Exercices à savoir refaire

Exercices Chap. 18

Exercice 3 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le degré et le coefficient dominant de $P_n = (X^2 + 1)^{2n} - (X^2 - 1)^{2n}$.

Exercice 4 :
Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que : $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$.

Exercice 7 :
On considère les ensembles : $E_1 = \{P \in \mathbb{R}_2[X],\ \tilde{P}(2) = 0\}$ et $E_2 = \{P \in \mathbb{R}[X],\ \tilde{P}'(1) = 1\}$.
Ces ensembles sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$?
Si oui, sont-ils de dimensions finies ? Si oui, en donner une base.

Exercice 8 :
Soit $E = \mathbb{R}_5[X]$. On considère : $F = \{P \in E,\ P(1) = P'(0) = P(-1) = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}(X^2, X(X + 1), (X + 1)^2)$.
1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de dimension finie de E. Donner une base de F et une base de G.
2. A-t-on $E = F \oplus G$?

Exercice 12 :
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(x \longmapsto \cos^p(x))_{0 \le p \le n}$ est une famille libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercice 13 : *Polynômes interpolateurs de Lagrange.*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $(n + 1)$ réels tels que : $a_0 < a_1 < \ldots < a_n$.

1. Montrer que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall j \in [\![0, n]\!]$, $L_i(a_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

2. Montrer que $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer les coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ dans cette base.

Exercice 15 :
Déterminer le reste des divisions euclidiennes suivantes dans $\mathbb{R}[X]$:
1. $A = X^n$ par $B = X^2 - 3X + 2$ avec $n \ge 2$
2. $A = X^n$ par $B = X(X - 1)^2$ avec $n \ge 3$
3. $A = (X \cos\theta + \sin\theta)^n$ par $B = X^2 + 1$ avec $n \ge 2$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 19 :
Soit $n \ge 1$et $P = n X^{n+1} - (n + 1)aX^n + a^{n+1}$ où a est un réel fixé. Montrer que P est divisible par $(X - a)^2$ et donner le quotient.

Exercice 23 : *Une application aux matrices.*
On considère : $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$.
1. Calculer $A^2 - 3A + 2I_2$.
2. Soit $n \ge 2$. Déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme X^n par $X^2 - 3X + 2$.
3. En déduire, A^n pour $n \ge 2$.

Exercice 28 :
Montrer que pour tout n entier naturel, le polynôme $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} X^k$ n'a pas de racine multiple.

Exercice 33 :
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré $n \ge 2$. On notera $\tilde{P}$ sa fonction polynomiale associée.
1. Montrer que si P est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ alors il en est de même pour son polynôme dérivé P′.
2. Montrer que si P est scindé sur $\mathbb{R}$, son polynôme dérivé P′ est aussi scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 38 : (cet exercice sera corrigé mardi)
On considère le polynôme : $P_n = (X + 1)^n - (X - 1)^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
1. Étudier la fonction cotangente définie par : $\text{cotan} : x \longmapsto \dfrac{\cos x}{\sin x}$.
2. Déterminer le degré et le coefficient dominant du polynôme P_n.
3. Démontrer que P_n admet $n - 1$ racines imaginaires pures, deux à deux distinctes. En déduire la factorisation de P_n dans $\mathbb{C}[X]$.
4. Factoriser P_n dans $\mathbb{R}[X]$.

Problème : *Les polynômes de Tchebychev.*
1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme de $\mathbb{R}[X]$, noté P_n, tel que : $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $P_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$.

3. a. Calculer P_2, P_3 et P_4.
b. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, le degré et le coefficient dominant de P_n. *On demande de démontrer proprement vos résultats !*
c. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$.

4. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les racines de P_n appartenant à l'intervalle $[-1, 1]$.
On pourra remarquer que : $\forall x \in [-1, 1],\ \exists !\ \theta \in [0, \pi],\ x = \cos\theta$.
b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Combien de racines de P_n appartiennent à l'intervalle $[-1, 1]$? Que pouvez-vous en déduire ?
c. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la factorisation de P_n dans $\mathbb{R}[X]$.
[…]