Semaine de colles n°23 du 07/04/25 au 11/04/25

DU PROGRAMME PRÉCÉDENT :• **Polynômes****I - L'ensemble $K[X]$ où $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$** **II - Dérivation dans $K[X]$** **III - Divisibilité dans $K[X]$** **IV - Racines d'un polynôme**

➔ Définition par divisibilité et caractérisation.

➔ Tout polynôme de degré $n \geq 0$ possède au plus n racines distinctes.

Si un polynôme de degré $\leq n$ admet au moins $n + 1$ racines distinctes, c'est le polynôme nul.

Ex. Trouver tous les polynômes P vérifiant : $P(X+1) = P(X)$.

IV - Racines d'un polynôme

➔ Ordre de multiplicité d'une racine : définition par divisibilité et caractérisation.

➔ Un polynôme de degré $n \geq 0$ possède au plus n racines, comptées avec leur multiplicité.

Si un polynôme de degré $\leq n$ admet au moins $n + 1$ racines, comptées avec leur multiplicité, c'est le polynôme nul.

V - Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

➔ Polynômes irréductibles, th. de D'Alembert-Gauss, polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et de $\mathbb{R}[X]$.

➔ Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

➔ Ex. de factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$: $X^n - 1$ (*)

VI - Somme et produit des racines d'un polynôme

➔ Savoir retrouver les relations coefficients/racines pour un polynôme de degré 3.

➔ Somme et produit des racines d'un polynôme scindé sur $\mathbb{K}$ de degré $n \geq 1$.

• **Dénombrements****I - Ensembles finis**

➔ Intervalles de $\mathbb{N}$, conditions sur p et n lorsqu'il existe une injection/surjection/bijection $[[1, p]]$ sur $[[1, n]]$.

➔ Définition d'un ensemble fini non vide et par convention, l'ensemble vide est fini.

➔ Parties d'un ensemble fini, cardinal d'une partie.

➔ Applications entre deux ensembles finis : Cardinal de $\mathcal{F}(E, F)$, conditions sur Card E et Card F lorsqu'il existe une injection/surjection/bijection E sur F.

Si E et F finis tels que Card E = Card F et $f : E \rightarrow F$ une application alors :

f injective $\Leftrightarrow f$ surjective $\Leftrightarrow f$ bijective.

II - Opérations sur les ensembles finis

➔ Cardinal d'une réunion disjointe ou non, d'un produit cartésien.

Rq. interrogateurs : La formule du crible est H.P.

➔ Définition d'une partition d'un ensemble, lien avec les cardinaux.

➔ Parties d'un ensemble fini : nombre total de parties (*) Dem. par récurrence.

III - Outils pour le dénombrement

➔ p-listes, p-arrangements, permutations.

➔ Applications : dénombrement des injections et des bijections de E dans F.

➔ p-combinaisons, nombre de parties de cardinal p d'un ensemble E fini.

➔ Un exemple classique : les anagrammes (*) A savoir expliquer sur des exemples.

NOUVEAU COURS :• **Dénombrements****IV - Propriétés des coefficients binomiaux**

➔ Démonstrations combinatoires : Symétrie, somme, triangle de Pascal, Binôme de Newton.

• **Probabilités sur un univers fini****I - Expérience aléatoire, univers et événements**

➔ Définitions, événements élémentaires, événements contraires, événement « A et B », événement « A ou B », Événements incompatibles, système complet d'événements.

II - Probabilités sur un univers fini

➔ Définition d'une probabilité.

➔ Probabilité d'une union d'événements deux à deux incompatibles.

➔ Distribution de probabilité sur Ω , détermination d'une probabilité par les images des événements élémentaires.

➔ Événements équiprobables, probabilité uniforme.

➔ Propriétés d'une probabilité :

Soit $(\Omega, \mathcal{P})$ un espace probabilisé fini. On a :

$$1. \forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2, P(A \setminus B) = P(A \cap \bar{B}) = P(C_A B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$2. \forall A \in \mathcal{P}(\Omega), P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$3. \text{Croissance. } \forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2, A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

$$4. \text{Réunion. } \forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2, P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (\text{Formule de Poincaré})$$

Prop.

Rq. la formule du crible est HP mais il faut savoir retrouver la formule donnant $P(A \cup B \cup C)$.

III - Probabilités conditionnelles

➔ Définition d'une probabilité conditionnelle, l'application P_B est une probabilité sur Ω .

➔ Formule des probabilités composées. (*)

➔ Formule des probabilités totales. (*)

➔ Formule de Bayes

IV - Événements indépendants

➔ Couple d'événements indépendants, si A et B sont indépendants alors A et $\bar{B}$ sont indépendants.

➔ Famille d'événements (mutuellement) indépendants

➔ Si $n \geq 3$, l'indépendance des A_i deux à deux n'entraîne pas leur indépendance (mutuelle).

Rq pour les interrogateurs : Nous n'avons pas encore fait d'exercices dans le chapitre « Probabilités »

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 24 : Applications linéaires.

Déroulement d'une colle

1. Citer une définition / propriété du chapitre « Probabilités » :

Par exemple : Définition d'un SCE, d'une probabilité, couple/famille d'événements indépendants, formule des probabilités composées, des probabilités totales et de Bayes (complètes avec leurs hypothèses !)

2. Éventuellement : une question de cours parmi celles signalées par (*)

3. Exercice(s) au choix de l'interrogateur.

La liste des exercices à savoir refaire est donnée ci-dessous mais l'interrogateur a le choix de poser ou non un exercice de cette liste.

Un cours non connu entraîne une note < 10.

Exercices Chap. 18Exercice 12 :

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(x \mapsto \cos^p(x))_{0 \leq p \leq n}$ est une famille libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercice 13 : *Polynômes interpolateurs de Lagrange.*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $(n+1)$ réels tels que : $a_0 < a_1 < \dots < a_n$.

- Montrer que pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, L_i(a_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- Montrer que $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer les coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ dans cette base.

Exercice 28 :

Montrer que pour tout n entier naturel, le polynôme $P_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} X^k$ n'a pas de racine multiple.

Exercice 33 :

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré $n \geq 2$. On notera $\tilde{P}$ sa fonction polynomiale associée.

- Montrer que si P est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ alors il en est de même pour son polynôme dérivé P' .
- Montrer que si P est scindé sur $\mathbb{R}$, son polynôme dérivé P' est aussi scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 38 :

On considère le polynôme : $P_n = (X+1)^n - (X-1)^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

- Étudier la fonction cotangente définie par : $\cotan : x \mapsto \frac{\cos x}{\sin x}$.
- Déterminer le degré et le coefficient dominant du polynôme P_n .
- Démontrer que P_n admet $n-1$ racines imaginaires pures, deux à deux distinctes. En déduire la factorisation de P_n dans $\mathbb{C}[X]$.
- Factoriser P_n dans $\mathbb{R}[X]$.

Problème : *Les polynômes de Tchebychev.*

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme de $\mathbb{R}[X]$, noté P_n , tel que : $\forall \theta \in \mathbb{R}, P_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$.

2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$.

3. a. Calculer P_2, P_3 et P_4 .

b. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, le degré et le coefficient dominant de P_n . On demande de démontrer proprement vos résultats !

c. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$.

4. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les racines de P_n appartenant à l'intervalle $[-1, 1]$.

On pourra remarquer que : $\forall x \in [-1, 1], \exists ! \theta \in [0, \pi], x = \cos \theta$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Combien de racines de P_n appartiennent à l'intervalle $[-1, 1]$? Que pouvez-vous en déduire ?

c. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la factorisation de P_n dans $\mathbb{R}[X]$.

[...]

Exercices Chap. 19Exercice 10 :

Soit E un ensemble à n éléments où $n \geq 1$.

- Dénombrer les couples (A, B) de parties de E vérifiant : $A \subset B$.
- Dénombrer les couples (A, B) de parties de E vérifiant : $A \not\subset B$ et $B \not\subset A$.

Exercice 14 : *Formule de Vandermonde.*

Soit n, n_1 et n_2 trois entiers naturels tels que : $n \leq n_1$ et $n \leq n_2$. Montrer de façon ensembliste que : $\sum_{k=0}^n \binom{n_1}{k} \binom{n_2}{n-k} = \binom{n_1+n_2}{n}$.

Exercice 16 : *Applications strictement croissantes.*

Pour $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, déterminer le nombre d'applications strictement croissantes de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Exercice 18 : *p-listes, p-arrangements ou p-combinaison ?*

- Nombre de codes possibles pour une carte bleue ?
- Au loto, on tire au hasard 6 boules parmi 49. Combien de tirages différents peut-on obtenir ?
- Au tiercé, une course de chevaux comporte 20 partants. Combien peut-il y avoir de résultats possibles de tiercés dans l'ordre ?
- Un porte manteau comporte 5 patères. De combien de façons peut-on y accrocher 3 manteaux différents ?
Rq. Au plus un manteau par patère.
- Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On en tire simultanément 3. Combien de tirages différents peut-on obtenir ?
- Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On en tire successivement 3 sans remise. Combien de tirages différents peut-on obtenir ?
- Combien de pièces contient un jeu de dominos ?
- Quel est le nombre de façons de choisir 2 délégués dans la classe de PCSI 3 ?
- Quel est le nombre de façons de choisir 2 délégués dans la classe de PCSI 3 si l'on impose un garçon et une fille ?
- Quel est le nombre de plaques d'immatriculation possibles ?
Rq. Une plaque d'immatriculation est composée de « 2 lettres – 3 chiffres – 2 lettres »
- Quel est le nombre de plaques d'immatriculation possibles dont tous les chiffres et les lettres sont deux à deux distincts ?
- Quel est le nombre d'anagrammes du mot PREPA ?
- Combien de menus différents peut-on composer si on a le choix entre 3 entrées, 2 plats et 4 desserts ?
- Un QCM, autorisant une seule réponse par question, comprend 15 questions qui ont chacune 4 réponses possibles. De combien de façons peut-on répondre à ce questionnaire ?

Exercice 21 :

Combien de mains de 13 cartes peut-on constituer avec un jeu de 52 cartes telles que :

- elles contiennent exactement un roi ?
- elles contiennent au moins un roi ?
- elles contiennent le roi de trèfle et au moins 2 piques ?
- elles contiennent 6 cartes d'une couleur, 4 cartes d'une autre et 3 cartes d'une troisième ?

Exercice 25 :

Combien y a-t-il de n -entiers dont l'écriture comporte exactement n chiffres ($n \geq 3$) et comportant exactement deux chiffres 8 ?