

Semaine de colles n°26 du 12/05/25 au 16/05/25

DU PROGRAMME PRÉCÉDENT :• Applications linéairesI - Définitions et propriétés de calculII - Noyau et image d'une application linéaire

- ➔ Noyau et image d'une application linéaire, structure.
- ➔ $f : E \longrightarrow F$ linéaire alors : f injective $\Leftrightarrow \text{Ker } f = \{0_E\}$ et f surjective $\Leftrightarrow \text{Im } f = F$
- ➔ Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$: $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im } g$ et $\text{Ker } f \subset \text{Ker}(g \circ f)$ • $g \circ f = 0 \Leftrightarrow \text{Im } f \subset \text{Ker } g$
- ➔ Équations linéaires : définition et structure de l'ensemble des solutions.
- ➔ Formes linéaires et hyperplans : un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle.
- Si D droite vectorielle non contenue dans un hyperplan H alors $E = H \oplus D$, caractérisation en dimension finie.

III - Lien avec les familles de vecteurs

- ➔ Image par une application linéaire d'une famille génératrice / d'une famille liée.
- ➔ Image par une application linéaire **injective** d'une famille libre.
- ➔ Définition d'une application linéaire par l'image d'une base :
Si $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une **base** de E et $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in F^n$, alors : $\exists ! f \in \mathcal{L}(E, F), \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(e_i) = y_i$
De plus, on a :
 f injective $\Leftrightarrow (y_1, y_2, \dots, y_n)$ famille libre dans F
 f surjective $\Leftrightarrow (y_1, y_2, \dots, y_n)$ famille génératrice de F
- ➔ Si F et G sev supplémentaires de E , alors une application linéaire définie sur E est entièrement déterminée par ses restrictions à F et G .
- ➔ Deux e.v. sont isomorphes ssi ils ont même dimension, tout $\mathbb{K}$ -ev de dimension $n > 0$, est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.
- ➔ Si E et F sont deux ev de dimension finie alors $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie égale à $\dim E \times \dim F$.

IV - Introduction aux matrices d'applications linéaires

- ➔ Écriture de la matrice d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ définie par l'image d'une base de E ou définie explicitement, relativement à des bases données.
- ➔ Multiplication d'une matrice par la matrice colonne des **coordonnées** d'un vecteur pour obtenir les **coordonnées** de son image par f . Il faut faire attention aux bases avec lesquelles on travaille.

IV - Applications linéaires en dimension finie

- ➔ Rang d'une application linéaire.
- ➔ Théorème du rang :
Soit E ev., F ev. quelconque et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. $\text{Im } f$ est isomorphe à tout supplémentaire de $\text{Ker } f$ dans E . (*)
Si de plus, E est de **dimension finie** : $\dim E = \dim(\text{Ker } f) + \text{rg } f = \dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f)$ (*)
- ➔ Caractérisation des applications linéaires injectives, surjectives, bijectives à l'aide du rang.
- ➔ Si $\dim E = \dim F$ et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors on a : f bijective $\Leftrightarrow f$ injective $\Leftrightarrow f$ surjective
- Si f endomorphisme en **dimension finie**, f bijective ssi f inversible à droite ou à gauche
- ➔ Invariance du rang par composition, à droite ou à gauche, par un isomorphisme.

V - Exemples usuels d'applications linéaires

- ➔ Homothéties vectorielles
- ➔ Projecteurs : définition, propriétés, caractérisation par idempotence :
Si p est un endomorphisme idempotent de E (càd $p \circ p = p$) alors :

$$\left. \begin{array}{l} 1. x \in \text{Im } p \Leftrightarrow p(x) = x \\ 2. E = \text{Ker } p \oplus \text{Im } p \\ 3. p \text{ est le projecteur sur } \text{Im } p \text{ parallèlement à } \text{Ker } p \end{array} \right\} (*)$$
- ➔ Symétries vectorielles : définition, propriétés, caractérisation par involutivité :
Si s est un endomorphisme involutif de E (càd $s \circ s = \text{Id}_E$) alors :

$$\left. \begin{array}{l} 1. E = \text{Ker}(s - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{id}_E) \\ 2. s \text{ symétrie par rapport à } \text{Ker}(s - \text{id}_E) \text{ parallèlement à } \text{Ker}(s + \text{id}_E). \end{array} \right\}$$

NOUVEAU COURS :• Comparaison locale des fonctions (Partie 1)I - Relations de comparaison locale des fonctions

- ➔ Notion de voisinage
- ➔ Relation de domination : définition, caractérisation par quotient, propriétés.
- ➔ Fonction négligeable devant une autre : définition, caractérisation par quotient, propriétés, comparaison des fonctions de références.
- ➔ Fonctions équivalentes : définition, caractérisation par quotient
Propriétés : symétrie, transitivité, compatibilité avec les opérations, substitution.
- ➔ Obtention d'équivalent par encadrement
- ➔ Équivalents et signe des expressions, liens entre équivalents et limites.
- ➔ Si f dérivable en a et si $f'(a) \neq 0$ alors $f(x) - f(a) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f'(a)(x - a)$.
- ➔ Équivalents de référence : A savoir démontrer (*)

• cas des fonctions polynomiales • $\sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ et $\tan x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ • $\cos x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$ $1 - \cos x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$	• $e^x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$ et $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ • $\ln(x+1) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ • $\text{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ et $\text{ch}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$	• Pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$, fixé : $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x$ • $\arctan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ et $\arcsin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ $\arccos(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\pi}{2}$
--	--	--

• Utilisation des matrices en algèbre linéaireI - Matrices représentatives

- ➔ Matrices représentatives d'un vecteur, d'une famille de vecteur, d'une application linéaire dans des bases données.

II - Opérations sur les matrices représentatives

- ➔ Combinaisons linéaires de matrices représentatives d'applications linéaires, isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $M_{n,p}(\mathbb{K})$ où $\dim E = p$ et $\dim F = n$, dimension de $\mathcal{L}(E, F)$.
- ➔ Isomorphisme canonique de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ sur $M_{n,p}(\mathbb{K})$, application linéaire canoniquement associée à une matrice.
- ➔ Calcul des coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire.
- ➔ Produit de matrices représentatives d'applications linéaires, lien entre applications linéaires bijectives et matrices inversibles.

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !Prévisions semaine n° 27 : Utilisation des matrices en algèbre linéaire (Notion de rang) et déterminantsDéroulement d'une colle

1. Une question de cours parmi celles signalées par (*)
2. Un calcul de limite avec utilisation d'équivalents
3. Exercice(s) au choix de l'interrogateur : On pourra commencer par un exercice à savoir refaire ou assez proche.

Un cours non connu entraîne une note < 10

Semaine de colles n°26 du 12/05/25 au 16/05/25 - Exercices à savoir refaire

Exercices Chap. 21Exercice 6 :

Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (2x - y + 2z, x - 3y - z, 4x - 7y)$$

1. Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
2. Déterminer le noyau et l'image de f . On déterminera une base de ces deux espaces.

Exercice 8 :

Soit $f: \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$ définie par : $\forall P \in \mathbb{R}_2[X], f(P) = (1 + X^2)P(2) + (X + 1)P'(1)$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Écrire sa matrice relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Déterminer le noyau et l'image de f . On déterminera une base de ces deux espaces.

Exercice 9 : Trace d'une matrice carrée.

1. On définit l'application trace par : $\varphi: M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ Montrer que φ est une forme linéaire.

$$M \longmapsto \text{tr}(M) = \sum_{i=1}^n m_{ii}$$

2. Montrer que : $\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{R})^2, \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
3. Existe-t-il un couple de matrices carrées (A, B) tel que $AB - BA = I_n$?

Exercice 11 :

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^2 - 3f + 2\text{id}_E = 0$.

1. Montrer que : $E = \text{Ker}(f - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{id}_E)$.
2. Montrer que f est un automorphisme et déterminer f^{-1} .

Exercice 14 :

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et f et g deux endomorphismes de E .

1. Montrer que : $\text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker } f \Leftrightarrow \text{Ker } g \cap \text{Im } f = \{0_E\}$
2. Montrer que : $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im } g \Leftrightarrow E = \text{Ker } g + \text{Im } f$.

Exercice 15 :

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ ayant pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Déterminer le rang de f .
2. En déduire la dimension du noyau de f . Déterminer une base du noyau de f et une base de l'image de f .
3. A-t-on $\text{Im } f \oplus \text{Ker } f = \mathbb{R}_2[X]$?

Exercice 17 :

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E .

Soit f l'unique endomorphisme de E vérifiant : $f(e_1) = e_2 - e_3, f(e_2) = e_3 - e_1$ et $f(e_3) = e_1 - e_2$.

1. Déterminer une base de $\text{Im } f$ et une base de $\text{Ker } f$.
2. Montrer que $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sont supplémentaires dans E .

Exercice 20 :

Soit E espace vectoriel de dimension 3. On considère f non nul, dans $\mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Déterminer le rang de f .
2. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de E dans laquelle la matrice de f soit : $M(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 25 :

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et f un endomorphisme de E .

On suppose que f est nilpotent d'ordre n c'est-à-dire $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Justifier qu'il existe un vecteur x de E tel que $f^{n-1}(x) \neq 0_E$.
2. Montrer que $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E .
3. Déterminer la matrice de f dans cette base. Quel est le rang de f ?

Exercice 26 :

Soit E un espace vectoriel de dimension n . Soit f et g deux endomorphismes de E tels que $f + g$ soit bijectif et $f \circ g = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Que vaut $\text{rg } f + \text{rg } g$?

Exercice 31 :

Soit $u = (1, 1, 2), v = (-2, -1, 3)$ et $w = (0, -3, -1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On pose : $F = \text{Vect}(u, v)$ et $G = \text{Vect}(w)$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Que peut-on en déduire ?
2. a. Soit p le projecteur sur F parallèlement à G . Déterminer sa matrice relativement à la base $\mathcal{B}$.
b. Déterminer la matrice de p relativement à la base canonique $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}^3$.

Pas de liste d'exercices à savoir refaire sur le Chap. 22

Il faut savoir calculer des limites avec utilisation d'équivalents.