

Semaine de colles n°29 du 09/06/25 au 13/06/25

DU PROGRAMME PRÉCÉDENT :**• Déterminants****I - Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base**

- Définitions : Forme n-linéaire / alternée / symétrique.
- Prop admise : L'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E de dim n est un ev de dimension 1.
- Définition : $\det_B$ est l'unique forme n-linéaire alternée sur E telle que $\det_B(B) = 1$
- Propriétés : $\det_B$ est antisymétrique, $\det$ d'une famille avec au moins un vecteur nul, $\det_B(\lambda u_1, \dots, \lambda u_n) = \dots$
- Si B et B' bases de E, lien entre $\det_B$ et $\det_{B'}$, caractérisation d'une base.

II - Expression du déterminant lorsque n = 2 ou n = 3

- Expression du déterminant dans une base en fonction des coordonnées dans les cas n = 2 et n = 3
- Rq. Interprétation en termes d'aire/volume.

III - Déterminant d'un endomorphisme

- Définition, propriétés, déterminant d'une composée, caractérisation des automorphismes.

III - Déterminant d'une matrice carrée

- Définition : déterminant de ses vecteurs colonnes dans la base canonique de K^n .
- Lien avec le déterminant d'une famille de vecteurs, lien avec le déterminant d'un endomorphisme.
- Le déterminant d'une matrice ayant une colonne nulle, deux colonnes égales ou proportionnelles est nul.
- Caractérisation matrices inversibles, déterminant d'un produit, de A^p , A^{-1} lorsque A est inversible, et de A^T .

IV - Calcul pratique du déterminant d'une matrice carrée

- Développement du déterminant par rapport à une ligne ou une colonne.
- Déterminant d'une matrice triangulaire
- Effet des opérations élémentaires

• Variables aléatoires sur un espace probabilisé fini**I - Variables aléatoires sur un espace probabilisé fini**

- Définition, événements de la forme $(X \in A)$, $(X = x)$, etc.
- Système complet d'événements associé à une variable aléatoire

II - Loi de probabilité d'une variable aléatoire

- Définition : P_X définie sur $\mathcal{P}(X(\Omega))$ et caractérisée par $P(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$
- Image d'une variable aléatoire par une application et loi associée.
- Loi conditionnelle d'une VA sachant un événement

III - Indicateurs de position et de dispersion

- Espérance : définition, interprétation, exemples, formule de transfert.
- Variance et écart-type : définition, interprétation, exemples, formule de Koenig-Huygens, propriétés.
- Inégalité de Markov (*) et Inégalité de Bienaymé-Tchebychev (*).

IV - Lois usuelles

- Loi uniforme : définition, exemples, espérance et variance.
Calcul espérance et variance dans le cas où $X \sim \mathcal{U}([1, n])$ (*)
- Loi de Bernoulli : définition, exemples, espérance et variance.
- Loi binomiale : définition, exemples, espérance et variance. (*)

NOUVEAU COURS :**• Variables aléatoires sur un espace probabilisé fini****V - Couples de VA**

- Couple de VA, Loi conjointe, lois marginales, covariance.
- Loi d'une composée
- Couple de VA indépendantes, espérance et variance.

VI - Généralisation au n-uplet de VA

- n-uplet de VA mutuellement indépendantes, lemme des coalitions
- Loi binomiale comme somme de loi de Bernoulli de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

• Comparaison locale des fonctions : Développements limités (Partie 2)**II - Notion de développements limités**

- Développements limités au voisinage de 0, d'un point a quelconque, unicité de la partie régulière.
- Cas particulier des DL d'ordre 0 et 1 : lien avec la continuité (ou le prolongement par continuité) et la dérivabilité en a (de f ou de son prolongement)
- Propriétés : troncature, substitution, parité, lien avec les équivalents.
- Deux exemples : $\frac{1}{1-x} = \dots$ et $\frac{1}{1+x} = \dots$

III - Formule de Taylor Young et DL usuels

- Formule de Taylor Young (admise pour le moment).
- $DL_n(0)$ usuels : exp, ch, sh, cos, sin, $x \mapsto (1+x)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$, fixé.

IV - Opérations sur les DL

- Somme, produit, composition, inverse, quotient. Ex : $DL_6(0)$ de tan par quotient (*)
- Développements limités d'une primitive. Ex : $DL_5(0)$ de la fonction arccosinus (*)
- $DL_n(0)$ de $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \ln(1-x)$ et $x \mapsto \arctan(x)$
Ex : $DL_6(0)$ de la fonction tangente en utilisant : $\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan(x)) = x$ (*)

Nous n'avons pour le moment pas fait de TD sur le calcul de DL mais il y a plein d'exs dans le cours.

Exs fait dans le cours

$$DL_3(0) \text{ de } g : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1+(-x))^{-1/2}$$

$$DL_3(0) \text{ de } f : x \mapsto e^x (1 + \sin x)$$

$$DL_3(0) \text{ de } f : x \mapsto \sqrt{1+\sin x}$$

$$DL_4(0) \text{ de } f : x \mapsto \exp(\cos(x))$$

$$DL_3(0) \text{ de } f : x \mapsto \frac{1}{1+e^x}$$

$$DL_3(0) \text{ de } f : x \mapsto \frac{e^x}{1+x}$$

$$DL_3(0) \text{ de } f : x \mapsto e^x \sin x$$

$$DL_3(0) \text{ de } f : x \mapsto \exp(\sin(x)).$$

$$DL_3(0) \text{ de } f : x \mapsto \frac{1}{1+\sin x}.$$

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !Prévisions semaine n° 30 : DL (fin : applications des DL) + IntégrationDéroulement d'une colle

1. Une question de cours parmi celles signalées par (*) et/ou un calcul de DL très proche de ceux faits dans le cours.
2. Exercice(s) au choix de l'interrogateur : On pourra commencer par un exercice à savoir refaire ou assez proche.

Un cours non connu entraine une note < 10

Semaine de colles n°29 du 09/06/25 au 13/06/25 - Exercices à savoir refaire

Exercices Chap. 24

Exercices faits dans le cours :

Ex. Soit $n \geq 1$ et $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & & & (0) \\ 1 & & 1 & & \\ \vdots & & (0) & \ddots & \\ 1 & & & & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$. On pose : $d_n = \det A_n$.

1^{re} méthode : On développe par rapport à la dernière colonne et on trouve une formule de récurrence.

2^{ème} méthode : En utilisant les OEC.

Exercice 2 : Déterminant d'ordre 3.

Calculer, sous forme factorisée, les déterminants suivants :

$$D_1 = \begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ c+a & ca & c^2+a^2 \end{vmatrix} \quad D_5 = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \quad D_7 = \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$$

Exercice 3 : 2. Calculer, sous forme factorisée, les déterminants suivants : $D_2 = \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$

Exercice 4 : Calculer les déterminants, d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$, suivants :

1. $\Delta_n = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & 2\beta & \cdots & 2\beta \\ 2\alpha & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2\beta \\ 2\alpha & \cdots & 2\alpha & \alpha+\beta \end{vmatrix}$

2. $\Delta_n(a) = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & a & \ddots & \vdots & n-2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & 1 \\ n-1 & n-2 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix}$

6. $\Delta_n = \begin{vmatrix} \cos \theta & 1 & & (0) \\ 1 & 2\cos \theta & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & 2\cos \theta \end{vmatrix}$ où $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Exercice 8 : Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2, a \neq b$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose : $\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} \lambda_1+x & a+x & \cdots & a+x \\ b+x & \lambda_2+x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a+x \\ b+x & \cdots & b+x & \lambda_n+x \end{vmatrix}$.

Montrer que $\Delta_n(x)$ est une fonction affine de x , puis calculer $\Delta_n(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 9 : Déterminant de Vandermonde.

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. On pose : $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$. Le but de cet exercice est de déterminer la valeur de ce déterminant.

1. 1^{ère} méthode. À l'aide d'O.E.C., trouver une relation de récurrence entre Δ_n et Δ_{n-1} . Conclure.

2. 2^{ème} méthode. En utilisant le polynôme $P = \prod_{k=1}^{n-1} (X - x_k)$

Exercice 20 : Diagonalisation.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -2 & 6 & 6 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

On dit que $\lambda \in \mathbb{R}$, est une valeur propre de f lorsqu'il existe $x \in \mathbb{R}^3$, non nul, tel que : $f(x) = \lambda x$.

1. Montrer que : λ valeur propre de $f \Leftrightarrow \det(A - \lambda I_3) = 0$.

2. Déterminer les valeurs propres de f .

3. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $M(f, \mathcal{B})$ soit diagonale.

4. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer la matrice de f^n dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercices Chap. 25

Exercice 10 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n tickets dont un en or donnant accès à une chocolaterie. On effectue des tirages successifs sans remise dans cette urne et on note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition du ticket d'or.

1. Déterminer la loi de X .

2. Calculer l'espérance et la variance de X .

Exercice 13 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose de n boîtes numérotées de 1 à n .

Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la boîte numérotée k contient k boules numérotées 1 à k . On choisit au hasard une boule dans une boîte.

On note X le numéro de la boîte et Y celui de la boule.

1. Déterminer la loi conjointe de (X, Y) .

2. En déduire la loi de Y (on laissera sous forme d'une somme) et son espérance.

Exercice 14 :

On lance un dé honnête et on note X le nombre obtenu.

On relance ensuite X fois le dé et on note Y le nombre de 1 obtenus parmi ces X tirages.

Déterminer la loi conjointe de X et Y . Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 15 :

Soit un nombre entier $n \geq 1$ et deux nombres réels p et a de $]0, 1[$.

Le nombre de graines plantées sur un mètre carré de jardin est une variable aléatoire N qui suit une loi $\mathcal{B}(n, p)$.

Chaque graine a la probabilité a de germer. Soit G le nombre de graines qui ont germé.

1. Pour tout i et j dans $\llbracket 0, n \rrbracket$, déterminer la probabilité $P_{(N=i)}(G=j) = P(G=j \mid N=i)$.

2. Déterminer la loi du couple (N, G) .

3. En déduire la loi de G .

Exercice 16 :

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que : $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m, p)$ avec $p \in [0, 1]$ et $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

Déterminer la loi de $S = X + Y$.

Exercice 22 :

Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

1. a. Déterminer la loi de $Y = \max(X_1, \dots, X_n)$.

Ind. On pourra commencer par déterminer $P(Y \leq k)$ pour $k \in Y(\Omega)$

b. Montrer que : $E(Y) = n - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n} \right)^n$.

2. a. Déterminer la loi de $Z = \min(X_1, \dots, X_n)$.

b. On note A l'événement : « il existe au moins un $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, tel que $X_i = 1$ ». Montrer que : $P(A) \geq 1 - \frac{1}{e}$.