

Semaine de colles n°30 du 16/06/25 au 20/06/25

DU PROGRAMME PRÉCÉDENT :• Variables aléatoires sur un espace probabilisé finiI - Variables aléatoires sur un espace probabilisé finiII - Loi de probabilité d'une variable aléatoireIII - Indicateurs de position et de dispersionIV - Lois usuellesV - Couples de VA

- ➡ Couple de VA, Loi conjointe, lois marginales, covariance.
- ➡ Loi d'une composée
- ➡ Couple de VA indépendantes, espérance et variance.

VI - Généralisation au n-uplet de VA

- ➡ n-uplet de VA mutuellement indépendantes, lemme des coalitions
- ➡ Loi binomiale comme somme de loi de Bernoulli de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

• Comparaison locale des fonctions : Développements limités (Partie 2)II - Notion de développements limités

- ➡ Développements limités au voisinage de 0, d'un point a quelconque, unicité de la partie régulière.
- ➡ Cas particulier des DL d'ordre 0 et 1 : lien avec la continuité (ou le prolongement par continuité) et la dérivabilité en a (de f ou de son prolongement)
- ➡ Propriétés : troncature, substitution, parité, lien avec les équivalents.
- ➡ Deux exemples : $\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \dots$ et $\frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \dots$

III - Formule de Taylor Young et DL usuels

- ➡ Formule de Taylor Young (admise pour le moment).
- ➡ DL_n(0) usuels : exp, ch, sh, cos, sin, $x \mapsto (1+x)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$, fixé.

IV - Opérations sur les DL

- ➡ Somme, produit, composition, inverse, quotient. Ex : DL₆(0) de tan par quotient (*)
- ➡ Développements limités d'une primitive. Ex : DL₅(0) de la fonction arccosinus (*)
- ➡ DL_n(0) de $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \ln(1-x)$ et $x \mapsto \arctan(x)$
Ex : DL₆(0) de la fonction tangente en utilisant : $\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan(x)) = x$ (*)

NOUVEAU COURS :• Comparaison locale des fonctions : Développements limités (Partie 2)V - Applications des DL

- ➡ À l'étude locale des fonctions en un point : équivalents/limites, continuité/dérivabilité, tangente et sa position relative par rapport à Cf.
- ➡ À l'étude des branches infinies.

• Intégration sur un segment des fonctions continuesI - Fonctions en escalier sur un segment

- ➡ Subdivision d'un segment, fonctions en escalier sur un segment
- ➡ Approximation des fonctions continues sur un segment, par des fonctions en escalier. (th. admis)

II - Intégrale d'une fonction continue sur un segment

- ➡ Définition de l'intégrale d'une fonction en escalier sur un segment et propriétés
- ➡ Définition de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment, interprétation en termes d'aire (admis)

III - Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment

- ➡ Propriétés : linéarité, positivité et croissance de l'intégrale, inégalité triangulaire.
- ➡ Soit f une fonction continue et de **signe constant** sur $[a, b]$. On a : $\int_{[a,b]} f = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

Rq. Si f est continue, de signe constant sur $[a, b]$ et non nulle alors $\int_{[a,b]} f \neq 0$.

- ➡ Inégalité de la moyenne (*), valeur moyenne d'une fonction.
- ➡ Inégalité de Cauchy-Schwarz.
- ➡ Définition de $\int_a^b f$ avec a et b quelconques, propriétés restants valables si $a > b$, relation de Chasles.

IV - Lien entre intégrales et primitive d'une fonction continue

- ➡ Primitive d'une fonction continue, lien primitives/intégrales.
- ➡ Étude de $x \mapsto \int_x^{2x} \frac{1}{te^t} dt$: ensemble de définition, variations, étude en 0 (prolongement et dérivabilité du prolongement en 0), étude en $\pm \infty$. Une question de cours pourra être tout ou une partie de cet exemple (*)

V - Formules de Taylor

- ➡ Formule de Taylor avec reste intégral, inégalité de Taylor-Lagrange, formule de Taylor-Young.

VI - Sommes de Riemann

- ➡ Méthodes des rectangles à droite et à gauche, sommes de Riemann.

Rq interrogateurs : Nous n'avons pour le moment pas fait d'exercices sur ce chapitre. ; à part un problème sur les intégrales de Wallis.

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Déroulement d'une colle

1. Une question de cours parmi celles signalées par (*)
2. Exercice(s) au choix de l'interrogateur : On pourra commencer par un exercice à savoir refaire ou assez proche.

Un cours non connu entraine une note < 10

Exercices Chap. 25Exercice 13 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose de n boîtes numérotées de 1 à n .

Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la boîte numérotée k contient k boules numérotées 1 à k . On choisit au hasard une boule dans une boîte.

On note X le numéro de la boîte et Y celui de la boule.

1. Déterminer la loi conjointe de (X, Y) .

2. En déduire la loi de Y (on laissera sous forme d'une somme) et son espérance.

Exercice 14 :

On lance un dé honnête et on note X le nombre obtenu.

On relance ensuite X fois le dé et on note Y le nombre de 1 obtenus parmi ces X tirages.

Déterminer la loi conjointe de X et Y . Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 15 :

Soit un nombre entier $n \geq 1$ et deux nombres réels p et a de $]0, 1[$.

Le nombre de graines plantées sur un mètre carré de jardin est une variable aléatoire N qui suit une loi $\mathcal{B}(n, p)$.

Chaque graine a la probabilité a de germer. Soit G le nombre de graines qui ont germé.

1. Pour tout i et j dans $\llbracket 0, n \rrbracket$, déterminer la probabilité $P_{(N=i)}(G=j) = P(G=j | N=i)$.

2. Déterminer la loi du couple (N, G) .

3. En déduire la loi de G .

Exercice 16 :

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que : $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m, p)$ avec $p \in [0, 1]$ et $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

Déterminer la loi de $S = X + Y$.

Exercice 22 :

Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

1. a. Déterminer la loi de $Y = \max(X_1, \dots, X_n)$.

Ind. On pourra commencer par déterminer $P(Y \leq k)$ pour $k \in Y(\Omega)$

b. Montrer que : $E(Y) = n - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^n$.

2. a. Déterminer la loi de $Z = \min(X_1, \dots, X_n)$.

b. On note A l'événement : « il existe au moins un $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, tel que $X_i = 1$ ». Montrer que : $P(A) \geq 1 - \frac{1}{e}$.

Exercices Chap. 26

Il faut savoir calculer des DL avec somme, quotient, composée, utilisation du th d'intégration terme à terme, ...

Il faut savoir utiliser les DL pour réaliser une étude locale ou l'étude d'une branche infinie

Exercice 10 :

Soit $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x \exp(x^2)$.

1. Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note f^{-1} sa bijection réciproque.

2. Justifier que f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^5$ sur $\mathbb{R}$.

Quelle est sa parité ?

Calculer le $DL_5(0)$ de f^{-1} . On ne cherchera à aucun moment à déterminer explicitement f^{-1} .

Exercices Chap. 27• TD : Intégrale de Wallis

Pour tout entier naturel n , on considère l'intégrale de Wallis d'indice n : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt$

1. a. Calculer I_0 et I_1 .

b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt$.

2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < I_{n+1} \leq I_n$. Puis, en déduire que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente vers une limite $\ell \geq 0$.

3. a. Soit $a \in]0, \frac{\pi}{2}[$. En utilisant que $I_n = \int_0^a \sin^n(t) dt + \int_a^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt$, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \leq a \sin^n a + \frac{\pi}{2} - a$.

b. En déduire que : $\ell = 0$.

4. Montrer à l'aide d'une intégration par parties à partir de I_{n+2} , que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.

5. Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$. En déduire que : $I_{n+1} \sim I_n$.

6. a. Déduire de la question 4, sans récurrence, que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a : $I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} \frac{\pi}{2}$.
b. De même, déterminer, pour $p \in \mathbb{N}$, l'expression de I_{2p+1} en fonction de p .

} Premières formules de Wallis.