30 EXERCICES DE MATHEMATIQUES POUR PREPARER LA RENTREE EN PCSI

A LIRE AVANT DE COMMENCER :

Les exercices proposés ont été choisis en fonction des difficultés observées chez nos étudiants dans la maîtrise des calculs élémentaires, ce qui pose problème non seulement en mathématiques mais également dans les autres disciplines scientifiques. Notre objectif est que vous puissiez réussir sans faute et rapidement ce type d'exercices, sans calculatrice puisque ces outils sont interdits dans la majorité des concours. Aussi, même si certains énoncés vous semblent modestes, nous vous demandons de rédiger proprement ces exercices, sans calculatrice, le plus rapidement possible.

Les exercices notés (✳) sont plus difficiles et constituent un objectif à moyen terme, il convient donc d'être d'abord à l'aise avec les autres exercices avant de les aborder.

Vous serez évalués en début d'année sur ce contenu (hors exercices étoilés).

★ Calculs algébriques

1. Calculer le plus rapidement possible et sans calculatrice :

$$A=\left(-1+\frac{2}{5}+\frac{1}{4}\right)+\frac{18}{5}\left(-\frac{3}{4}+\frac{5}{3}-\frac{2}{9}\right) \qquad B=\left(\frac{4}{9}-\frac{2}{3}\right)\left(2-\frac{4}{3}\right)-\left(\frac{3}{5}-\frac{7}{15}\right)\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{2}\right) \qquad C=\frac{1-\frac{1}{3}+\frac{5}{6}}{-1+\frac{1}{2}-\frac{3}{4}}\times\frac{2-\frac{1}{5}+\frac{7}{10}}{1-\frac{3}{2}-\frac{5}{4}}$$

2. Écrire les réels suivants sous la forme $a+b\sqrt{3}$ où a et b sont des rationnels : $A=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ $\quad B=\dfrac{1}{1-\sqrt{3}}$ $\quad C=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2+\sqrt{3}}$

3. Soit n un entier naturel non nul, on définit l'entier « n factorielle » par $n\,! = 1\times 2\times \ldots \times n$ et on pose $0\,! = 1$

Écrire à l'aide de factorielles : $A = 5\times 6\times 7\times 8\times 9$ $\qquad B=\dfrac{9\times 10\times 11\times 12}{5\times 6\times 7}$ $\qquad C = n(n+1)(n+2)$ où $n\in\mathbb{N}$

4. Soit n et k deux entiers naturels vérifiant $0\le k\le n$, on pose : $\dbinom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Calculer le plus rapidement possible et sans calculatrice :

$$A=\binom{199}{2} \qquad B=\binom{20}{3} \qquad C=\frac{\binom{17}{2}}{\binom{19}{3}} \qquad D=\frac{\binom{17}{2}\binom{5}{3}}{\binom{20}{3}}$$

5. Factoriser les expressions suivantes :

$P_1(x)=(x^2-4)+3(x+2)-4(x+2)^2$ $\qquad P_2(x)=3x^2-7x$

$P_3(x)=(4x^2-9)+5(2x+3)$ $\qquad P_4(x)=x^3+x^2+x+1$

$P_5(x)=3x^3+2x^2-7x+2$ $\qquad P_6(x)=e^{2x}-(1+e)e^x+e$

Indication : Pour factoriser P_5, on utilise : $\boxed{\mathrm{P}(a)=0 \Leftrightarrow \text{P se factorise par } (x-a)}$.

6. Simplifier les expressions suivantes : $\quad A=\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x+1}}$ $\qquad B=\dfrac{e^{2x}-e^x-2}{e^x+1}$

7. Soit a, b et c trois réels vérifiant $ab+bc+ac=0$, calculer $S=\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{c+a}{b}+\dfrac{a+b}{c}$.

8. Simplifier les expressions suivantes :

$A=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)+\cos(3\pi-x)+\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$ $\qquad B=\cos^4 x-\sin^4 x+2\sin^2 x$ $\qquad$ (✳) $C=\sin^6 x+\cos^6 x+3\sin^2 x\cos^2 x-1$

★ **Démonstration par récurrence**

9. Démontrer par récurrence que :

a. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ S_1 = 1+2+...+n = \sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$

b. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ S_2 = 1^2+2^2+...+n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

10. Démontrer par récurrence sur n que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, a > 0$, $(1+a)^n \geq 1+na$.

11. Soit $n \in \mathbb{N}$, on considère la somme géométrique : $S_n = 1+q+q^2+...+q^n = \sum_{k=0}^{n} q^k$

a. Démontrer par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, q \neq 1$, $S_n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

b. Que vaut S_n quand $q = 1$?

c. Calculer les sommes suivantes : $A_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k$ $\quad B_n = \sum_{k=0}^{n} \left(-\dfrac{1}{2}\right)^k$ $\quad C_n = \sum_{k=0}^{n-1} 3^k$ $\quad D_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\dfrac{1}{3}\right)^k$

★ **Résolutions d'équations**

12. Résoudre le plus vite possible et <u>sans calculatrice</u> les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

E$_1$: $\dfrac{4x+7}{5} - \dfrac{x-5}{3} = 2$ $\qquad$ E$_2$: $1 - \dfrac{3}{2b} = \dfrac{5}{b}$ $\qquad$ E$_3$: $\dfrac{9}{a} = \dfrac{8}{a+1} + \dfrac{1}{a-1}$

13. Résoudre le plus vite possible et <u>sans calculatrice</u> les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

E$_1$: $x^2+12x+35=0$ $\qquad$ E$_2$: $x^2-10x+23=0$ $\qquad$ E$_3$: $x^2+4x+5=0$

E$_4$: $x^2-5=0$ $\qquad$ E$_5$: $3x^2+7x=0$ $\qquad$ E$_6$: $x^2+1=0$

14. On suppose que l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$, admet deux solutions dans $\mathbb{C}$ notées x_1 et x_2.

Montrer que : $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $P = x_1.x_2 = \dfrac{c}{a}$.

<u>Application :</u> Résoudre le plus rapidement possible les équations suivantes.

E$_1$: $(1+\sqrt{3})x^2 - 2\sqrt{3}x + \sqrt{3} - 1 = 0$ $\qquad$ et $\qquad$ E$_2$: $1514x^2 + x = 1515$

15. Résoudre les équations dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

E$_1$: $e^{2x} + (1-\sqrt{5})e^x - \sqrt{5} = 0$ $\qquad$ E$_2$: $\dfrac{x}{1-x} + \dfrac{1-x}{x} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{2}{3}$ $\qquad$ E$_3$: $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$

(✳) **16.** Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation E$_m$: $(m-1)x^2 - 4mx + 4m - 1$ où m désigne un paramètre réel.

17. Résoudre dans les réels, les systèmes suivants :

$S_1 : \begin{cases} 2x-3y=3 \\ x+y=-10 \end{cases}$ $\qquad$ $S_2 : \begin{cases} -3x+2y=5 \\ 2x+5y=0 \end{cases}$ $\qquad$ $S_3 : \begin{cases} \sqrt{2}x-3y=2\sqrt{6} \\ -2x+3\sqrt{2}y=-4\sqrt{3} \end{cases}$ $\qquad$ (✳) $S_4 : \begin{cases} mx-2y=m \\ -x+2my=0 \end{cases}$ où $m \in \mathbb{R}$

18. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

E$_1$: $2\cos x = \sqrt{3}$ $\qquad$ E$_2$: $\sqrt{2}\sin x = -1$ $\qquad$ E$_3$: $(2\sin x - 1)(2\sqrt{3}\cos x + 3) = 0$

E$_4$: $2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$ $\qquad$ E$_5$: $\sin(2x) + \sin x = 0$ $\qquad$ E$_6$: $\cos(2x) = \sin(6x)$

19. Résoudre dans l'intervalle I les inéquations suivantes :

a. $\cos x \leq \dfrac{1}{2}$ sur $[-\pi, \pi]$ $\qquad$ **b.** $\sin x > -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ sur $[0, 2\pi]$ $\qquad$ **c.** $\sin x \geq \dfrac{1}{2}$ sur I = $[0, 4\pi]$

(✳) **d.** $\cos\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{3}\right) \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ sur I = $[-\pi, \pi]$ $\qquad$ (✳) **e.** $2\cos\left(2t + \dfrac{\pi}{6}\right) > 1$ sur I = $[0, 2\pi]$

★ Études de signes et inégalités

20. Étudier le signe des expressions suivantes :

$A(x) = -7x^2 + 6x + 1$ $\quad$ $B(x) = x^2 + x + 1$ $\quad$ $C(x) = \dfrac{x}{1+x} + \dfrac{1+x}{x} + 2$

$D(x) = 3x^4 - 4x^2 + 1$ $\quad$ $E(x) = 4e^{2x} + e^x - 5$ $\quad$ **(✳)** $F(x) = x - \sqrt{x^2+1}$ $\quad$ **(✳)** $G(x) = \sqrt{x^2-1} - \dfrac{1}{2}x$

(✳) 21. a. Montrer que si $0 < x < 1$ alors $x^2 < x < 1$

b. En déduire que : $\forall\, x \in\ ]0, 1[$, $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 > 5x^5$

c. Résoudre dans $]0, +\infty[$, $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = 5x^5$

22. Soit x et y deux réels strictement positifs, comparer les nombres : $\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$ et $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)$

★ Calculs de limites

23. Déterminer, si elles existent, les limites suivantes en justifiant votre réponse.

a. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^2 - 2x + 2}{2x^3 + x - 5}$ $\quad$ **b.** $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{3x^2 - 2x + 2}{2x^3 + x - 5}$ $\quad$ **c.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x}$ $\quad$ **d.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{2x}$

e. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x}{x}$ $\quad$ **f.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ $\quad$ **g.** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{\ln x}$ $\quad$ **h.** $\lim\limits_{x \to 0+} x^2 \ln x$

i. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$ $\quad$ **j.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^3}$ $\quad$ **k.** $\lim\limits_{x \to -\infty} x^5 e^x$ $\quad$ **l.** $\lim\limits_{t \to +\infty} \left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{2t}\right)$

m. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2x}}$ $\quad$ **n.** $\lim\limits_{x \to 1} \ln\left(\dfrac{2x^2 - x - 1}{x - 1}\right)$ $\quad$ **o.** $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-t^2+1}$ $\quad$ **p.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\ln(x^2+1) - \ln(x+3)\right)$

★ Dérivation / Calcul de dérivées

24. Calculer l'expression des dérivées des fonctions suivantes, **en indiquant leur domaine de validité**.

$f_1 : x \mapsto 2x\ln(x^2+1)$ $\quad$ $f_2 : x \mapsto (x+1)\sqrt{x}$ $\quad$ $f_3 : x \mapsto \dfrac{e^{x^2+1}}{x}$ $\quad$ $f_4 : t \mapsto \cos^2\left(\omega t + \dfrac{\pi}{4}\right)$

$f_5 : x \mapsto \ln(\sqrt{x^2+1})$ $\quad$ $f_6 : x \mapsto e^{-x}\cos x$ $\quad$ $f_7 : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ $\quad$ $f_8 : x \mapsto \ln(\ln x)$

★ Calculs de primitives et d'intégrales

On prendra soin de faire la différence entre ces deux notions :

- *Une primitive de f sur un intervalle I est une fonction dérivable sur I et dont la dérivée est égale à f.*
- *L'intégrale d'une fonction continue sur [a, b] est un réel qui peut se calculer à l'aide d'une primitive de f sur [a, b].*

25. Déterminer **UNE** primitive des fonctions suivantes, **en indiquant leur domaine de validité** :

$f_1 : x \mapsto 3 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$ $\quad$ $f_2 : x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$ $\quad$ **(✳)** $f_3 : x \mapsto \dfrac{x-1}{x+1}$ $\quad$ $f_4 : x \mapsto (2x+1)^2$

$f_5 : x \mapsto \sqrt{x+1}$ $\quad$ $f_6 : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ $\quad$ $f_7 : x \mapsto e^{-kx}$ où k est un réel. $\quad$ $f_8 : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$

$f_9 : x \mapsto \cos(ax+b)$ où a et $b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ $\quad$ **(✳)** $f_{10} : x \mapsto \cos^2 x$

26. Calculer les intégrales suivantes le plus vite possible en utilisant une primitive et <u>sans calculatrice</u> :

a. $\int_0^1 x^n dx$ pour $n \in \mathbb{N}$ **b.** $\int_0^1 (4x^7 - 2x^3 + 3x^2 - 2)dx$ **c.** $\int_{-3}^{-2} \frac{du}{u}$ **d.** $\int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)dx$

e. $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{3x}{\sqrt{1+x^2}}dx$ **f.** $\int_0^1 te^{t^2-1}dt$ **g.** $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(x-1)^2}$ **h.** $\int_e^2 \frac{dt}{t(\ln t)^2}$

i. Montrer que $\int_0^1 \frac{dx}{1+e^x} = \ln\left(\frac{2e}{1+e}\right)$ en utilisant : $\frac{1}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$.

j. Déterminer a et b deux réels tels que $\frac{2t-1}{t-1} = a + \frac{b}{t-1}$ et calculer $\int_2^4 \frac{2t-1}{t-1}dt$.

27. Calculer les intégrales suivantes en utilisant la formule d'intégration par parties :

a. $\int_0^5 xe^{-x}dx$ **b.** $\int_1^e x\ln x\,dx$ **c.** $\int_1^2 (x^2 - x + 1)\ln x\,dx$ **d.** $\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx$

e. $\int_{\pi/2}^{\pi} (x^2 - 3x)\sin(2x)\,dx$ **f.** $\int_e^2 \ln x\,dx$ **g.** $\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$ **h.** $\int_{1/4}^1 \sqrt{x}\ln x\,dx$

(✳) **28.** *Suite définie par une intégrale.*

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on considère l'intégrale : $I_n = \int_1^2 \frac{1}{x^n}e^{1/x}dx$.

a. Calculer I_2.

b. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$: $I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n)I_n$.

c. En déduire la valeur de I_3.

★ <u>Équations différentielles</u>

29. Résoudre les équations différentielles suivantes :

a. $y' = 2y + 3$ **b.** $2y' = 5 - 3y$ **c.** $y' + 4y = -1$ **d.** $\begin{cases} y'+5y=3 \\ y(0)=-2 \end{cases}$ **e.** $\begin{cases} y'+2y=0 \\ y(-2)=\frac{1}{2} \end{cases}$

f. $y' - 2y = e^x$. On pourra commencer par vérifier que $x \longmapsto -e^x$ est solution de cette équation différentielle

g. $y' - 2y = e^{2x}$. On pourra commencer par vérifier que $x \longmapsto xe^{2x}$ est solution de cette équation différentielle.

h. $y' + 3y = \sin x$. On pourra commencer par vérifier que $x \longmapsto \frac{3}{10}\sin x - \frac{1}{10}\cos x$ est solution de cette équation différentielle.

★ <u>Dénombrement</u>

30. Pour chaque exemple proposé, justifier votre réponse en utilisant le vocabulaire du cours : listes, arrangements, combinaisons, permutations, complémentaire, partition, …

a. On s'intéresse au code de 4 chiffres utilisant les chiffres de 0 à 9.
- Combien y-a-t-il de codes possibles ?
- Combien y-a-t-il de codes avec des chiffres deux à deux distincts ?
- Combien y-a-t-il de codes contenant le chiffre 1 ?
- Combien de codes contiennent exactement deux fois le chiffre 8 ?
(✳) - Combien y-a-t-il de codes formant une suite strictement croissante de 4 chiffres ?

b. On s'intéresse aux mains de 8 cartes dans un jeu de 52.
- Combien y-a-t-il de mains possibles
- Combien y-a-t-il de mains contenant 3 cartes rouges et 5 cartes noires ?
- Combien de main contiennent au moins 1 cœur ?
- Combien de mains contiennent exactement 3 cœurs ?
(✳) - Combien de mains contiennent exactement 2 rois et 3 cœurs ?