Semaine de colles n°1 du 22/09/25 au 26/09/25

Du programme précédent :

• Exercices de révisions de terminale

Cf feuille d'exercices (disponible sur le cahier de prépa de la classe)

• Ensembles, logique et raisonnement

I à III - Éléments de logique

- Connecteurs logiques : disjonction ou conjonction de deux assertions, négation d'une assertion
- Implication, implication réciproque et contraposée, équivalence.

IV - Ensembles

- Parties, inclusion, réunion, intersection, complémentaire, différence de deux ensembles, produit cartésien.

V - Les quantificateurs

VI - Divers types de raisonnement

Récurrence simple, démontrer une implication (raisonnement direct ou contraposée), démontrer une équivalence (raisonnement direct ou double implication), raisonnement par l'absurde, raisonnement par analyse/synthèse. Ce dernier type de raisonnement a pour l'instant été très peu utilisé.
Ex. Toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, s'écrit de façon unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. **(*)**

• Ordre sur $\mathbb{R}$ et inégalités

I – Les ensembles de nombres

II – Opérations dans $\mathbb{R}$

- Propriétés de l'addition et de la multiplication de réels.

III – Comparaison dans $\mathbb{R}$

- Propriétés de la comparaison dans $\mathbb{R}$, ordre total.
- Règles pour transformer une inégalité.

⚠ • Quand on multiplie (ou divise) une inégalité par une quantité, ON ÉTUDIE D'ABORD SON SIGNE.
• On ajoute des inégalités de même sens mais ON NE LES SOUSTRAIT JAMAIS.
• On multiplie des inégalités de même sens QUE SI ELLES PORTENT SUR DES RÉELS POSITIFS.

- Méthode pour démontrer une inégalité : utilisation du sens de variations d'une fonction, se ramener à une étude de signe, réaliser un tableau de signes, réaliser une étude de fonction, etc…
- Vocabulaire lié à l'ordre : Majorant/minorant, plus grand/petit élément, borne sup. /borne inf.
- Toute partie non vide et majorée (minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (inférieure).

IV – Intervalles de $\mathbb{R}$

- Définition, classification.

V – Valeur absolue

- Définition, propriétés de calcul, interprétation en termes de distance.
- Lien avec les intervalles : $|x-a|=r \Leftrightarrow -r=x-a=r \Leftrightarrow x=a-r$ ou $x=a+r$

$|x-a|\le r \Leftrightarrow -r\le x-a\le r \Leftrightarrow a-r\le x\le a+r \Leftrightarrow x\in[a-r,a+r]$.

$|x-a|\ge r \Leftrightarrow x-a\le -r$ ou $x-a\ge r \Leftrightarrow x\in\,]-\infty,a-r]\cup[a+r,+\infty[$

Savoir interpréter en termes de distances, faire un schéma.
Une question de cours pourra être la résolution d'équations/inéquations simples avec des valeurs absolues. **(*)**

- Inégalité triangulaire avec cas d'égalité **(*) L'interrogateur est libre de demander toute la démonstration ou seulement une partie ; mais il faut savoir citer le théorème complet.**

Et généralisation : Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, on a : $\left|\sum_{i=1}^{n}x_i\right|\le\sum_{i=1}^{n}|x_i|$.

VI – Partie entière et approximations décimales d'un réel

- Définition, notation $\lfloor x\rfloor$, représentation graphique, propriétés.
- $\forall x\in\mathbb{R},\forall p\in\mathbb{Z},\ \lfloor x+p\rfloor=\lfloor x\rfloor+p$
- Approximations décimales à 10^{-n} près d'un réel.

On peut approcher un réel quelconque d'aussi près que l'on veut par des décimaux

Nouveau cours :

• Généralités sur les fonctions réelles

I – Généralités sur les fonctions réelles

- Définition, image d'une fonction.
- Représentation graphique des fonctions associées et application à la recherche de symétries.
- Opérations sur les fonctions : multiplication par un réel, somme, produit et composition.

II – Propriétés globales

- Périodicité, parité
- Fonctions monotones et strictement monotones, fonctions majorées/minorées/bornées.

III – Régularité

- Continuité, théorème des valeurs intermédiaires, prolongement par continuité en un point.
- Dérivabilité, variations et dérivées, dérivée seconde.

Cette semaine une question de cours pourra être d'étudier la continuité/dérivabilité d'une fonction composée (avec calcul de la dérivée). Rédaction parfaite exigée ! **(*)**

IV – Propriétés de la courbe représentative

- Tangentes, asymptotes, méthode d'étude des branches infinies.
- Fonctions convexes, fonctions concaves et caractérisations.

V – Bilan : comment étudier une fonction à valeurs réelles

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 2 : Généralités sur les fonctions usuelles (fin) + Fonctions usuelles.

Déroulement d'une colle

1. Révisions : Un ou deux calculs inspirés de la fiche de révisions
2. Écrire sous forme symbolique une définition des chapitres au programme et/ou sa négation
3. Une question de cours : méthode ou démonstration signalées par **(*)**
4. Un exercice identique ou très proche d'un exercice « à savoir refaire » (cf. liste ci-dessous),
5. Éventuellement, s'il reste du temps. un exercice plus compliqué

Une question de cours (points 1 à 3) non connue entraine une note < 10.
Si les points 1 à 4 sont réussis, la note sera ≥ 13.

Semaine de colles n°1 du 22/09/25 au 26/09/25 - Exercices à savoir refaire

Exercices Chap. 1

Exercice 1 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes : **b.** $0 < \dfrac{2-x}{1-x} < 1$

Exercice 3 :
Démontrer les inégalités suivantes :

a. $\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leq x$ **b.** $\forall x \in \mathbb{R},\ x+1 \leq e^x$ **c.** $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}],\ \frac{2}{\pi} x \leq \sin x \leq x$

Rq. 2 méthodes vues en TD : utilisation de la convexité et par étude de fonction.
Rq. Ces inégalités sont à connaitre.

Exercice 4 : *Inégalités entre les moyennes.*
Soit a et b deux réels strictement positifs. Montrer que : $\dfrac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$.

Exercice 10 :
1. a. Montrer que : $\forall x \in [0,1],\ \forall k \in \mathbb{N},\ 0 \leq x^k(1-x)^k \leq x^k$

b. En déduire que : $\forall x \in]0,1[,\ \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \sum_{k=0}^{n} x^k(1-x)^k \leq \dfrac{1}{1-x}$

Exercice 13 :
Soit A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$.
1. On considère A + B = $\{ a+b, a \in A, b \in B\}$. Montrer que A + B est majorée et que l'on a : sup(A + B) = sup A + sup B.

Exercice 16 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes : **f.** $\left|\dfrac{3x-6}{4}\right| \geq 2$ **g.** $|2x-4| \leq |x-1|$

Exercice 19 :
Représenter graphiquement sur $[-2, 2]$, les fonctions suivantes :
$f_1 : x \longmapsto \lfloor 2x \rfloor$ $f_2 : x \longmapsto \lfloor x^2 \rfloor$

Exercice 20 :

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \left\lfloor \left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2 \right\rfloor = 4n+1$.

Exercice 24 :

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor$

Exercices Chap. 2

Exercice 1 :
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Écrire à l'aide des quantificateurs : **1.** f est paire. **2.** f est majorée. **3.** f admet un maximum. **4.** f est bornée. **5.** f n'est pas paire. **6.** f n'est pas majorée. **7.** f n'est pas bornée.

Exercice 6 :
Soit f la fonction définie par : $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.
1. Déterminer son ensemble de définition et étudier sa parité.
2. Sans calcul de dérivée, donner les variations de f sur son ensemble de définition.

Exercice 8 :

Proposer un domaine de définition et un domaine d'étude pour les fonctions définies par : **b.** $g(t) = \dfrac{1}{\cos(t)+\cos(2t)}$

Exercice 9 :

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$. <u>*Ind.*</u> *On pourra étudier la périodicité de* $f : x \longmapsto \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor$.

Exercice 17 : *Continuité.*
Étudier la continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$.

Exercice 18 : *Continuité et dérivabilité.*
Soit f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \begin{cases} \alpha & \text{si } x = 0 \\ e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.
1. Déterminer le réel α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^+$.
2. Étudier, pour cette valeur de α, la dérivabilité de f sur son ensemble de définition.

Exercice 20 : *Tangentes particulières.*
Soit f une fonction définie par : $f(x) = \sqrt{x^3(2-x)}$.
Déterminer l'ensemble de définition D_f de f puis les tangentes à la courbe représentative de f aux bornes de D_f.