Semaine de colles n°2 du 29/09/25 au 03/10/25

Du programme précédent :

• Ensembles, logique et raisonnement

I à III - Éléments de logique

- Connecteurs logiques : disjonction ou conjonction de deux assertions, négation d'une assertion
- Implication, implication réciproque et contraposée, équivalence.

IV - Ensembles

- Parties, inclusion, réunion, intersection, complémentaire, différence de deux ensembles, produit cartésien.

V - Les quantificateurs

VI - Divers types de raisonnement

Récurrence simple, démontrer une implication (raisonnement direct ou contraposée), démontrer une équivalence (raisonnement direct ou double implication), raisonnement par l'absurde, raisonnement par analyse/synthèse. Ce dernier type de raisonnement a pour l'instant été très peu utilisé.
Ex. Toute fonction de ℝ dans ℝ, s'écrit de façon unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. **(*)**

• Généralités sur les fonctions réelles

I – Généralités sur les fonctions réelles

- Définition, image d'une fonction.
- Représentation graphique des fonctions associées et application à la recherche de symétries.
- Opérations sur les fonctions : multiplication par un réel, somme, produit et composition.

II – Propriétés globales

- Périodicité, parité
- Fonctions monotones et strictement monotones, fonctions majorées/minorées/bornées.

III – Régularité

- Continuité, théorème des valeurs intermédiaires, prolongement par continuité en un point.
- Dérivabilité, variations et dérivées, dérivée seconde.

IV – Propriétés de la courbe représentative

- Tangentes, asymptotes, méthode d'étude des branches infinies.
- Fonctions convexes, fonctions concaves et caractérisations.

V – Bilan : comment étudier une fonction à valeurs réelles

Nouveau cours :

• Généralités sur les fonctions réelles

VI – Fonction bijective

- Fonction bijective, bijection réciproque et dérivation de la bijection réciproque.

• Fonctions usuelles : Rappels de Terminale et compléments

I – Fonctions exponentielle, logarithme népérien

- Inégalités à connaitre : $\forall x \in \mathbb{R}, x+1 \leq e^x$ et $\forall x > 0, \ln x \leq x-1$

II – Fonctions puissances

- Définition de a^b avec a et b réels tel que a > 0, propriétés de calcul.
- Étude complète des fonctions puissances $x \longmapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ variations et prolongements suivant les valeurs de α
- Fonctions racine n-ième.
- Méthode d'étude de fonctions de la forme $x \longmapsto u(x)^{v(x)}$.
- Croissances comparées.

III – Fonctions circulaires

- Rappels : fonctions cosinus et sinus
- Inégalités à connaitre : $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leq |x|$ et $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \frac{2}{\pi} x \leq \sin x \leq x$ **(*)**
- Les fonctions cosinus et sinus sont indéfiniment dérivables sur ℝ, expression des dérivées n-ième. **(*)**
- Fonction tangente : Étude complète avec ensemble de définition, dérivée, variations, limites, courbe représentative.

Une question de cours pourra être de réaliser l'étude de la fonction tangente. **(*)**

- Formules d'addition, de linéarisation et de duplication.

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 3 : Nombres complexes (début)

Déroulement d'une colle

1. Écrire sous forme symbolique une définition des chapitres au programme et/ou sa négation
2. Étude la continuité et/ou dérivabilité d'une fonction composée ou de la forme $x \longmapsto u(x)^{v(x)}$ (avec calcul de la dérivée), sur un exemple. Rédaction parfaite exigée !
3. Une question de cours : méthode ou démonstration signalées par **(*)**
4. Un exercice identique ou très proche d'un exercice « à savoir refaire » (cf. liste ci-dessous),
5. Éventuellement, s'il reste du temps, un exercice plus compliqué

Une question de cours (points 1 à 3) non connue entraine une note < 10.
Si les points 1 à 4 sont réussis, la note sera ≥ 13.

Semaine de colles n°2 du 29/09/25 au 03/10/25 - Exercices à savoir refaire

Exercices Chap. 2

Exercice fait dans le cours :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+2}$.

a. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à déterminer.
b. Déterminer alors la bijection réciproque de f.

Exercice 1 :
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Écrire à l'aide des quantificateurs :
1. f est paire. **2.** f est majorée.
3. f admet un maximum. **4.** f est bornée.
5. f n'est pas paire. **6.** f n'est pas majorée.
7. f n'est pas bornée.

Exercice 6 :
Soit f la fonction définie par : $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.
1. Déterminer son ensemble de définition et étudier sa parité.
2. Sans calcul de dérivée, donner les variations de f sur son ensemble de définition.

Exercice 8 :
Proposer un domaine de définition et un domaine d'étude pour les fonctions définies par : **b.** $g(t)=\dfrac{1}{\cos(t)+\cos(2t)}$

Exercice 9 :
Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \left\lfloor \dfrac{x}{2}\right\rfloor+\left\lfloor \dfrac{x+1}{2}\right\rfloor=\lfloor x\rfloor$. *Ind.* *On pourra étudier la périodicité de* $f : x \longmapsto \left\lfloor \dfrac{x}{2}\right\rfloor+\left\lfloor \dfrac{x+1}{2}\right\rfloor-\lfloor x\rfloor$.

Exercice 15 : *Comportement asymptotique.*
Préciser le comportement asymptotique, en $+\infty$ et/ou $-\infty$, des fonctions dont on donne l'expression ci-dessous :
1. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$

Exercice 17 : *Continuité.*
Étudier la continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lfloor x\rfloor+(x-\lfloor x\rfloor)^2$.

Exercice 18 : *Continuité et dérivabilité.*
Soit f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x)=\begin{cases}\alpha & \text{si } x=0\\ e^{-1/x} & \text{si } x>0\end{cases}$, où $\alpha\in\mathbb{R}$.
1. Déterminer le réel α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^+$.
2. Étudier, pour cette valeur de α, la dérivabilité de f sur son ensemble de définition.

Exercice 20 : *Tangentes particulières.*
Soit f une fonction définie par : $f(x)=\sqrt{x^3(2-x)}$.
Déterminer l'ensemble de définition D_f de f puis les tangentes à la courbe représentative de f aux bornes de D_f.

Exercice 27 :
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ f(x)=x^2+\ln x+1$.
1. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ sur un ensemble J à déterminer.
2. Donner le tableau de variations de f^{-1}.
3. Montrer que f^{-1} est dérivable sur J et exprimer sa dérivée en fonction de f^{-1}. *On ne demande pas d'expliciter* f^{-1}.
4. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f^{-1} au point d'abscisse 2.

Exercices Chap. 3

Exercice 1 :
4. Montrer que : $\forall x \in\ ]0, 1[,\ x^x(1-x)^{1-x} \geq \dfrac{1}{2}$.

Exercice 2 : Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:
a. $\ln|x-1| + \ln|x-3| = \ln|3x^2 - 4x + 1|$ **c.** $2^{x+4}+3^x=2^{x+2}+3^{x+2}$ **e.** $3^x + 4^x = 5^x$

Exercice 5 :
1. Étudier la fonction : $f : x \longmapsto x+\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$

Exercice 7 :
1. Étudier la fonction : $f : x \longmapsto x^x$

Exercice 9 : *Équations et inéquations trigonométriques.*
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :
2. $\tan x \tan 2x = 1$ **6.** $\tan\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right) = -1$ **7.** $\tan x \geq 1$

Exercice 13 :
Déterminer toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}^*$ et vérifiant : $\forall\ x \in \mathbb{R}^*,\ f(x)+3f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x^2$.