

Semaine de colles n°3 du 06/10/25 au 10/10/25

DU PROGRAMME PRÉCÉDENT :• Généralités sur les fonctions réellesI - Généralités sur les fonctions réellesII - Propriétés globalesIII - RégularitéIV - Propriétés de la courbe représentativeV - Bilan : comment étudier une fonction à valeurs réellesVI - Fonction bijective

- ➡ Fonction bijective, bijection réciproque et dérivation de la bijection réciproque.

• Fonctions usuelles : Rappels de Terminale et complémentsI - Fonctions exponentielle, logarithme népérien

- ➡ Inégalités à connaître : $\forall x \in \mathbb{R}, x+1 \leq e^x$ et $\forall x > 0, \ln x \leq x-1$

II - Fonctions puissances

- ➡ Définition de a^b avec a et b réels tel que $a > 0$, propriétés de calcul.
- ➡ Étude complète des fonctions puissances $x \mapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ variations et prolongements suivant les valeurs de α
- ➡ Fonctions racine n-ième.
- ➡ Méthode d'étude de fonctions de la forme $x \mapsto u(x)^{v(x)}$.
- ➡ Croissances comparées.

III - Fonctions circulaires

- ➡ Rappels : fonctions cosinus et sinus
- ➡ Inégalités à connaître : $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leq |x|$ et $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$ (*)
- ➡ Les fonctions cosinus et sinus sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$, expression des dérivées n-ième. (*)
- ➡ Fonction tangente : Étude complète avec ensemble de définition, dérivée, variations, limites, courbe représentative.
- Une question de cours pourra être de réaliser l'étude de la fonction tangente. (*)
- ➡ Formules d'addition, de linéarisation et de duplication.

NOUVEAU COURS :• Les nombres complexesI - Ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$

- ➡ Définition, unicité de la forme algébrique d'un complexe, parties réelles et imaginaires.
- ➡ Addition et multiplication : propriétés.
- ➡ Conjugaison, propriétés de calcul, expressions de $\operatorname{Re}(z)$ et $\operatorname{Im}(z)$, caractérisation des éléments de $\mathbb{R}$ et $i\mathbb{R}$.
- ➡ Module, propriétés de calcul.
- ➡ Inégalité triangulaire et cas d'égalité. (*)

II - Forme trigonométrique

- ➡ Ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1.
 - ➡ Notation $e^{i\theta}$, propriétés de calcul, formules de De Moivre et d'Euler.
 - ➡ Argument d'un complexe de module 1, d'un complexe non nul, propriétés de calcul.
 - ➡ Caractérisation des réels et des imaginaires purs à l'aide des arguments.
 - ➡ Une méthode à connaître : factorisation par l'angle moitié.
- Ex. Module et arguments de $1 + e^{it}$ ou $1 - e^{it}$, à discuter suivant les valeurs de $t \in \mathbb{R}$ (*)
- ➡ Exponentielle complexe et propriétés.
- Résolution d'équations de la forme $e^z = a$.

III - Applications à la trigonométrie

- ➡ Formules de trigonométrie usuelles : linéarisation, factorisation.
- ➡ Transformation de $a \cos x + b \sin x$ et résolution d'équations de la forme : $a \cos x + b \sin x = c$.

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !Prévisions semaine n° 4 : Nombres complexes (fin)Déroulement d'une colle

1. Une formule de trigonométrie A CONNAÎTRE SANS HESITATION ! cf. formulaire
2. Un calcul parmi :
 - Justification d'une formule de trigonométrie
 - Équation de la forme $e^z = a$ ou $a \cos x + b \sin x = c$

Vous devez être efficaces dans vos calculs.

3. Une question de cours : méthode ou démonstration signalées par (*)
4. Exercice(s) : On commencera par un exercice identique ou très proche d'un exercice « à savoir refaire » (cf. liste ci-dessous).

Un cours non connu entraîne une note < 10.

Semaine de colles n°3 du 06/10/25 au 10/10/25 - Exercices à savoir refaire

Exercices Chap. 2Exercice fait dans le cours :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 2}$.

- Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à déterminer.
- Déterminer alors la bijection réciproque de f .

Exercice 27 :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f(x) = x^2 + \ln x + 1$.

- Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ sur un ensemble J à déterminer.
- Donner le tableau de variations de f^{-1} .
- Montrer que f^{-1} est dérivable sur J et exprimer sa dérivée en fonction de f^{-1} . *On ne demande pas d'expliciter f^{-1} .*
- Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f^{-1} au point d'abscisse 2.

Exercices Chap. 3Exercice 1 :

- Montrer que : $\forall x \in]0, 1[, x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}$.

Exercice 2 : Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{a. } \ln |x-1| + \ln |x-3| = \ln |3x^2 - 4x + 1| \quad \text{c. } 2^{x+4} + 3^x = 2^{x+2} + 3^{x+2} \quad \text{e. } 3^x + 4^x = 5^x$$

Exercice 5 :

- Étudier la fonction : $f: x \longmapsto x + \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$

Exercice 7 :

- Étudier la fonction : $f: x \longmapsto x^x$

Exercice 9 : Équations et inéquations trigonométriques.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

$$\text{2. } \tan x \tan 2x = 1 \quad \text{6. } \tan \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = -1 \quad \text{7. } \tan x \geq 1$$

Exercice 13 :

Déterminer toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}^*$ et vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$.

Exercices Chap. 4Exercice 7 :

Mettre sous forme exponentielle les complexes suivants. On précisera leur module et leurs arguments.

$$\begin{array}{lll} \text{1. } z_1 = \frac{(1+i\sqrt{3})^7}{(1+i)^5} & \text{4. } z_4 = -2ie^{i\alpha}, \alpha \in \mathbb{R} & \text{5. } z_5 = (1-i)^n + (1+i)^n, n \in \mathbb{N} \\ \text{7. } z_7 = e^{ix} + e^{-iy}, (x, y) \in \mathbb{R}^2 & \text{8. } z_8 = \frac{e^{ix} - 1}{e^{ix} + 1}, x \in]-\pi, \pi[\end{array}$$

Exercice 9 :

Soit z un complexe appartenant à $\mathbb{U} \setminus \{1\}$. Prouver que $\frac{z+1}{z-1}$ est un imaginaire pur.

Exercice 10 :

- Soit u appartenant à $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $z \in \mathbb{C}$. Prouver que : $\frac{z - u\bar{z}}{1 - u} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow u \in \mathbb{U}$ ou $z \in \mathbb{R}$.

Exercice 15 : Soit u et v deux complexes.

Montrer que :
1. $|u| + |v| \leq |u + v| + |u - v|$
2. Identité du parallélogramme. $|u + v|^2 + |u - v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$

Exercice 23 : Équations avec des modules.

- Trouver l'ensemble des complexes z tels que : $|z + 1| = |z| + 1$.
- Trouver l'ensemble des complexes z tels que : $|z| = |1 - z| = \frac{1}{|z|}$.

Exercice 24 : Équations avec des arguments.

- Trouver l'ensemble des complexes z tels que : $2 \arg(z + i) \equiv \arg(z) + \arg(i) \pmod{2\pi}$.

Exercice 25 :

- Trouver tous les complexes z tels que : $z^3 = -16 \bar{z}^7$.

TRIGONOMETRIE

I – Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	

II – Relations entre cos, sin et tan

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

III – Angles associés

Une lecture efficace du cercle trigonométrique permet de retrouver les relations suivantes :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

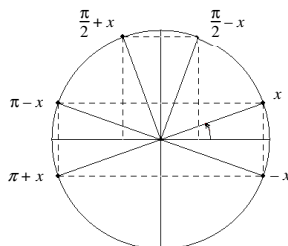
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin x$$



$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\sin(-x) = -\sin x$$

Lorsque cela a un sens : $\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = -\frac{\cos x}{\sin x} = -\frac{1}{\tan(x)}$ et $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{1}{\tan(x)}$

IV – Formules usuelles

Formules d'addition. $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,$ $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$ $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$ Lorsque cela a un sens, on a : $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$	Formules de linéarisation. $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,$ $\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)]$ $\sin a \sin b = -\frac{1}{2} [\cos(a + b) - \cos(a - b)]$ $\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) + \sin(a - b)]$
---	---

Formules de duplication. $\forall a \in \mathbb{R},$ $\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$ $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$ $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \left(\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi\mathbb{Z}}{2} \right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \right) \right), \quad \tan(2a) = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$	On en déduit : $\forall a \in \mathbb{R}, \quad \cos^2 a = \frac{1}{2} (1 + \cos(2a))$ $\sin^2 a = \frac{1}{2} (1 - \cos(2a))$
--	--

Formules de factorisation. $\forall (p, q) \in \mathbb{R}^2, \cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ $\sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$	$\cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$ $\sin p - \sin q = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$
--	---

Si $x \notin \pi + 2\pi\mathbb{Z}$ et $t = \tan \frac{x}{2}$, on a : $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ $\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$ avec $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$

Formule de De Moivre.

On a : $\forall (\theta, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}, (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ c'est-à-dire $\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$

V – Équations trigonométriques

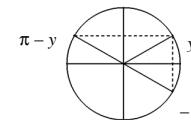
$$\cos x = \cos y \Leftrightarrow x = y + 2k\pi \text{ ou } x = -y + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x \equiv y [2\pi] \text{ ou } x \equiv -y [2\pi]$$

$$\sin x = \sin y \Leftrightarrow x = y + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - y + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x \equiv y [2\pi] \text{ ou } x \equiv \pi - y [2\pi]$$

$$\tan x = \tan y \Leftrightarrow x = y + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \equiv y [\pi]$$



Cas particuliers :

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x \equiv 0 [\pi] \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

VI – Transformation de $a \cos x + b \sin x$

But : Transformer de $a \cos x + b \sin x$ en $A \cos(x - \theta)$ où a et b sont deux réels, non tous les deux nuls.

Méthode :

- On met en facteur $\sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$ et on obtient : $a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right)$
- Le complexe $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ est de module 1 donc : $\exists \theta \in \mathbb{R}, \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \theta$ et $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \theta$
- On obtient : $a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \theta \cos x + \sin \theta \sin x) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \theta)$

Rq. Cette transformation est utile lorsqu'on cherche à résoudre une équation de la forme $a \cos x + b \sin x = c$ avec a, b et c des réels tels que $(a, b) \neq (0, 0)$.