Semaine de colles n°4 du 13/10/25 au 17/10/25

Du programme précédent :

• **Les nombres complexes**

I - Ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$

- Définition, unicité de la forme algébrique d'un complexe, parties réelles et imaginaires.
- Addition et multiplication : propriétés.
- Conjugaison, propriétés de calcul, expressions de Re(z) et Im(z), caractérisation des éléments de $\mathbb{R}$ et $i\mathbb{R}$.
- Module, propriétés de calcul.
- Inégalité triangulaire et cas d'égalité. (*)

II - Forme trigonométrique

- Ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1.
- Notation $e^{i\theta}$, propriétés de calcul, formules de De Moivre et d'Euler.
- Argument d'un complexe de module 1, d'un complexe non nul, propriétés de calcul.
- Caractérisation des réels et des imaginaires purs à l'aide des arguments.
- Une méthode à connaitre : factorisation par l'angle moitié.

Ex. Module et arguments de $1 + e^{it}$ ou $1 - e^{it}$, à discuter suivant les valeurs de $t \in \mathbb{R}$ (*)

- Exponentielle complexe et propriétés.

Résolution d'équations de la forme $e^z = a$.

III - Applications à la trigonométrie

- Formules de trigonométrie usuelles : linéarisation, factorisation.
- Transformation de a cos x + b sin x et résolution d'équations de la forme : a cos x + b sin x = c.

Nouveau cours :

III - Applications à la trigonométrie.

- Calcul des sommes : $S_1 = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $S_2 = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$. (*)

IV – Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$

Rappel / complément : Si z_0 est solution d'une équation polynomiale alors elle se factorise par $(z - z_0)$.

- Racines carrées d'un complexe : Définition, méthode de calcul, tout complexe non nul admet 2 racines carrées opposées.
- Application à la résolution d'une équation de degré 2.
- Racine n-ième de l'unité, somme et produit.

Rq. Une question de cours pourra être de donner la définition et la justification des expressions des racines n-ième de l'unité. (*)

- Racines cubiques de l'unité : 1, j et $\bar{j} = j^2$.

  Relations : $j^3 = 1$, $1 + j + j^2 = 0$ et j et j^2 sont les solutions de $z^2 + z + 1 = 0$.
- Résolution de $z^n = a$, $a \in \mathbb{C}$.

V – Nombres complexes et géométrie plane

- Interprétation graphique des complexes, module, argument.
- Affixe d'un point, d'un vecteur, lieux de points usuels (cercles, disques, médiatrices)
- Caractérisation de points alignés, caractérisation de droites perpendiculaires.
- Transformations du plan (définitions + expressions complexes) : symétrie orthogonale d'axe (Ox)
  Translations
  Rotation de centre Ω et de rayon r
  Homothétie de centre Ω et de rapport $k > 0$.

VI – Compléments sur les fonctions à valeurs complexes

- La dérivée d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$ est définie par dérivation de ses parties réelle et imaginaire.
- Dérivation de $x \longmapsto e^{ax}$ avec $a \in \mathbb{C}$ et de $t \longmapsto e^{\varphi(t)}$ avec $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{C}$ dérivable sur I intervalle de $\mathbb{R}$.

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 5 : Calcul de sommes et de produits

Déroulement d'une colle

1. Une formule de trigonométrie A CONNAITRE SANS HESITATION ! cf. formulaire
2. Résolution d'une équation de la forme :

   $e^z = a$ ou a cos x + b sin x = c ou de degré 2 à coefficients dans $\mathbb{C}$ ou $z^n = a$.

Vous devez être efficaces dans vos calculs.

1. Une question de cours parmi celles signalées par (*).
2. Exercice(s) : On commencera par un exercice identique ou très proche d'un exercice « à savoir refaire » (cf. liste ci-dessous).

Un cours non connu entraine une note < 10.

Semaine de colles n°4 du 13/10/25 au 17/10/25 - Exercices à savoir refaire

Exercices Chap. 4

Exercice 7 :
Mettre sous forme exponentielle les complexes suivants. On précisera leur module et leurs arguments.

1. $z_1 = \dfrac{(1+i\sqrt{3})^7}{(1+i)^5}$ **4.** $z_4 = -2ie^{i\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ **5.** $z_5 = (1-i)^n + (1+i)^n$, $n \in \mathbb{N}$

7. $z_7 = e^{ix} + e^{-iy}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ **8.** $z_8 = \dfrac{e^{ix}-1}{e^{ix}+1}$, $x \in \,]-\pi, \pi[$

Exercice 9 :
Soit z un complexe appartenant à $\mathbb{U} \setminus \{1\}$. Prouver que $\dfrac{z+1}{z-1}$ est un imaginaire pur.

Exercice 10 :
2. Soit u appartenant à $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $z \in \mathbb{C}$. Prouver que : $\dfrac{z - u\bar{z}}{1-u} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow u \in \mathbb{U}$ ou $z \in \mathbb{R}$.

Exercice 15 : Soit u et v deux complexes.
Montrer que : **1.** $|u| + |v| \leq |u+v| + |u-v|$
2. *Identité du parallélogramme.* $|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$

Exercice 23 : *Équations avec des modules.*
1. Trouver l'ensemble des complexes z tels que : $|z+1| = |z| + 1$.
2. Trouver l'ensemble des complexes z tels que : $|z| = |1-z| = \dfrac{1}{|z|}$.

Exercice 24 : *Équations avec des arguments.*
1. Trouver l'ensemble des complexes z tels que : $2\arg(z+i) \equiv \arg(z) + \arg(i) \ [\pi]$.

Exercice 25 :
2. Trouver tous les complexes z tels que : $z^3 = -16\ \bar{z}^{\,7}$.

Exercice 29 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes. On donnera les solutions sous forme algébrique.
a. $(z+1)^n = (z-1)^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$
Nous avons montré que $n-1$ solutions trouvées sont imaginaires pures et 2 à 2 distinctes.

Exercice 33 :
1. Déterminer les racines carrées du complexe $5 - 12i$.
2. Déterminer la/les solution(s) imaginaire(s) pure(s) de l'équation (E) : $z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = 0$.
3. Résoudre l'équation de la question précédente.

Exercice 36 : *A savoir retrouver très rapidement !*
Soit A, B et M trois points du plan complexe, distincts deux à deux, d'affixes respectives a, b et z. On pose : $Z = \dfrac{z-a}{z-b}$.

Montrer que l'on a : **1.** A, B, M alignés $\Leftrightarrow$ $Z \in \mathbb{R}^*$
2. ABM rectangle en M $\Leftrightarrow$ $Z \in i\mathbb{R}^*$
3. ABM isocèle en M $\Leftrightarrow$ $|Z| = 1$
4. ABM rectangle isocèle en M $\Leftrightarrow$ $Z = i$ ou $Z = -i$
5. ABM équilatéral $\Leftrightarrow$ $Z = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $Z = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

Exercice 39 :
a. Trouver l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant : M, P point d'affixe iz et I point d'affixe i sont alignés.
b. Trouver l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant : $[z-(1+i)]\left[\bar{z}-(1-i)\right] = 8$

TRIGONOMÉTRIE

I – Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	

II – Relations entre cos, sin et tan

$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{ \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \}$ $\quad \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \qquad 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

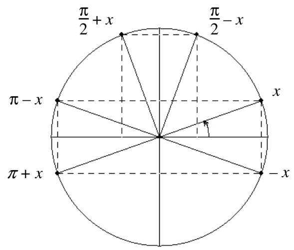
III – Angles associés

Une lecture <u>efficace</u> du cercle trigonométrique permet de retrouver les relations suivantes :

$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin x \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos x}$

$\boxed{\cos(\pi - x) = -\cos x \quad \sin(\pi - x) = \sin x}$

$\boxed{\cos(\pi + x) = -\cos x \quad \sin(\pi + x) = -\sin x}$



$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x}$

$\boxed{\cos(-x) = \cos x \quad \sin(-x) = -\sin x}$

Lorsque cela a un sens : $\tan\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = -\dfrac{\cos x}{\sin x} = -\dfrac{1}{\tan(x)}$ et $\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = \dfrac{1}{\tan(x)}$

IV – Formules usuelles

Formules d'addition.

$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,$
$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

Lorsque cela a un sens, on a : $\tan(a + b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

Formules de linéarisation.

$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,$
$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a + b) + \cos(a - b)\right]$
$\sin a \sin b = -\frac{1}{2}\left[\cos(a + b) - \cos(a - b)\right]$
$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a + b) + \sin(a - b)\right]$

Formules de duplication.

$\forall a \in \mathbb{R},$
$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$
$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

$\forall a \in \mathbb{R} \setminus \left(\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)\right),\ \tan(2a) = \dfrac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$

On en déduit :
$\forall a \in \mathbb{R},$
$\cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos(2a))$
$\sin^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos(2a))$

Formules de factorisation.

$\forall (p, q) \in \mathbb{R}^2,\ \cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ $\qquad \cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ $\qquad \sin p - \sin q = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$

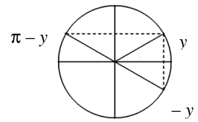
Si $x \notin \pi + 2\pi\mathbb{Z}$ et $t = \tan\frac{x}{2}$, on a : $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ $\qquad \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ $\qquad \tan x = \dfrac{2t}{1-t^2}$ avec $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$

Formule de De Moivre.

On a : $\forall (\theta, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N},\ (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ c'est-à-dire $\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

V – Équations trigonométriques

$\cos x = \cos y \iff x = y + 2k\pi$ ou $x = -y + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$\iff x \equiv y\ [2\pi]$ ou $x \equiv -y\ [2\pi]$
$\sin x = \sin y \iff x = y + 2k\pi$ ou $x = \pi - y + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$\iff x \equiv y\ [2\pi]$ ou $x \equiv \pi - y\ [2\pi]$
$\tan x = \tan y \iff x = y + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \iff x \equiv y\ [\pi]$



Cas particuliers : $\cos x = 0 \iff x \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\sin x = 0 \iff x \equiv 0\ [\pi] \iff x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

VI – Transformation de $a \cos x + b \sin x$

<u>But :</u> Transformer de $a\cos x + b\sin x$ en $A\cos(x - \theta)$ où a et b sont deux réels, non tous les deux nuls.

<u>Méthode :</u>

- On met en facteur $\sqrt{a^2+b^2} \neq 0$ et on obtient : $a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)$
- Le complexe $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ est de module 1 donc : $\exists\, \theta \in \mathbb{R},\ \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\theta$ et $\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\theta$
- On obtient : $a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\cos\theta\cos x + \sin\theta\sin x\right) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x - \theta)$

Rq. Cette transformation est utile lorsqu'on cherche à résoudre une équation de la forme $a\cos x + b\sin x = c$ avec a, b et c des réels tels que $(a, b) \neq (0, 0)$.