

DU PROGRAMME PRÉCÉDENT :• Les nombres complexesI - Ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ II - Forme trigonométriqueIII - Applications à la trigonométrie

- Formules de trigonométrie usuelles : linéarisation, factorisation.
- Transformation de $a \cos x + b \sin x$ et résolution d'équations de la forme : $a \cos x + b \sin x = c$.
- Calcul des sommes : $S_1 = \sum_{k=0}^n \cos(kx)$ et $S_2 = \sum_{k=0}^n \sin(kx)$. (*)

IV - Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$

Rappel / complément : Si z_0 est solution d'une équation polynomiale alors elle se factorise par $(z - z_0)$.

- Racines carrées d'un complexe : Définition, méthode de calcul, tout complexe non nul admet 2 racines carrées opposées.
- Application à la résolution d'une équation de degré 2.
- Racine n-ième de l'unité, somme et produit.

Rq. Une question de cours pourra être de donner la définition et la justification des expressions des racines n-ième de l'unité. (*)

- Racines cubiques de l'unité : 1, j et $\bar{j} = j^2$.

Relations : $j^3 = 1$, $1 + j + j^2 = 0$ et j et j^2 sont les solutions de $z^2 + z + 1 = 0$.

- Résolution de $z^n = a$, $a \in \mathbb{C}$.

V - Nombres complexes et géométrie plane

- Interprétation graphique des complexes, module, argument.
- Affixe d'un point, d'un vecteur, lieux de points usuels (cercles, disques, médiatrices)
- Caractérisation de points alignés, caractérisation de droites perpendiculaires.
- Transformations du plan (définitions + expressions complexes) : symétrie orthogonale d'axe (Ox)

Translations

Rotation de centre Ω et de rayon r

Homothétie de centre Ω et de rapport $k > 0$.

VI - Compléments sur les fonctions à valeurs complexes

- La dérivée d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$ est définie par dérivation de ses parties réelle et imaginaire.
- Dérivation de $x \mapsto e^{ax}$ avec $a \in \mathbb{C}$ et de $t \mapsto e^{\varphi(t)}$ avec $\varphi : I \rightarrow \mathbb{C}$ dérivable sur I intervalle de $\mathbb{R}$.

NOUVEAU COURS :• Calcul de sommes et de produitsI - Le symbole Σ

- Notation Σ pour les sommes
- Règles de calcul : termes constants, facteur constant, changement d'indice, symétrie, sommes télescopiques.
- Séparation des termes pairs et impairs
- Sommes classiques : $\sum_{k=1}^n k$, $\sum_{k=1}^n k^2$ (*) et $\sum_{k=1}^n k^3$.

- Sommes de type géométrique. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On a : $\sum_{k=p}^n q^k = \begin{cases} q^p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n-p+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$ (*)

- Formule de Bernoulli : $\forall (x, y) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}^*, x^n - y^n = (x-y) \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k = (x-y) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$

- Cas des sommes doubles, Sommes triangulaires : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i x_{i,j} = \sum_{1 \leq j \leq i \leq n} x_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n x_{i,j}$

II - Le symbole Π

- Notation Π pour les produits
- Règles de calcul, produits télescopiques.

III - Formule du binôme de Newton et applications à la trigonométrie

- Définition de $n!$, de $\binom{n}{k}$, valeurs particulières, symétrie et Si $1 \leq k \leq n$, on a : $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.

- Formule du triangle de Pascal et formule du binôme de Newton.

- Application à la trigonométrie : (*) - Un exercice utilisant une des deux méthodes ci-dessous.

Pour transformer des produits de $\cos^p x$ et $\sin^q x$, avec $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, en somme de $\cos(kx)$ et $\sin(lx)$ où $(k, l) \in \mathbb{N}^2$:
Utiliser les formules d'Euler puis appliquer la formule du binôme de Newton.

Pour exprimer $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$, avec n entier, en fonction de $\sin x$ et $\cos x$:

On a : $\cos(nx) = \operatorname{Re}(e^{inx}) = \operatorname{Re}((\cos x + i \sin x)^n)$ et $\sin(nx) = \operatorname{Im}(e^{inx}) = \dots$ d'après la formule de De Moivre
Ensuite, on utilise la formule du binôme de Newton.

Rq. pour les interrogateurs : Nous n'avons pour le moment, pas traités d'exercices sur le calcul de produit.

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 6 : Calculs de primitives et d'intégrales

Déroulement d'une colle

- Une formule de trigonométrie A CONNAITRE SANS HÉSITATION ! cf. formulaire
- Résolution d'une équation de la forme : $e^z = a$ ou de degré 2 à coefficients dans $\mathbb{C}$ ou $z^n = a$.

Vous devez être efficaces dans vos calculs.

- Une question de cours parmi celles signalées par (*).
- Exercice(s) : On commencera par un exercice identique ou très proche d'un exercice « à savoir refaire » (cf. liste ci-dessous).

Un cours non connu entraîne une note < 10.

Semaine de colles n°5 du 03/11/25 au 07/11/25 - Exercices à savoir refaire

Exercices Chap. 4Exercice 25 :

2. Trouver tous les complexes z tels que : $z^3 = -16\sqrt{z}$.

Exercice 29 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes. On donnera les solutions sous forme algébrique.

a. $(z+1)^n = (z-1)^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

Nous avons montré que $n-1$ solutions trouvées sont imaginaires pures et 2 à 2 distinctes.

Exercice 33 :

1. Déterminer les racines carrées du complexe $5-12i$.

2. Déterminer la/les solution(s) imaginaire(s) pure(s) de l'équation (E) : $z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = 0$.

3. Résoudre l'équation de la question précédente.

Exercice 36 : A savoir retrouver très rapidement !

Soit A, B et M trois points du plan complexe, distincts deux à deux, d'affixes respectives a , b et z . On pose : $Z = \frac{z-a}{z-b}$.

Montrer que l'on a : 1. A, B, M alignés $\Leftrightarrow Z \in \mathbb{R}^*$

4. ABM rectangle isocèle en M $\Leftrightarrow Z = i$ ou $Z = -i$

2. ABM rectangle en M $\Leftrightarrow Z \in i\mathbb{R}^*$

5. ABM équilatéral $\Leftrightarrow Z = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $Z = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

3. ABM isocèle en M $\Leftrightarrow |Z| = 1$

Exercice 39 :

a. Trouver l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant : M, P point d'affixe iz et I point d'affixe i sont alignés.

b. Trouver l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant : $[z-(1+i)]\overline{[z-(1-i)]} = 8$

Exercices Chap. 5

Exercice 4 : Calculer les sommes suivantes (suivant les cas n appartient à $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$) :

$$1. S_1 = \sum_{k=1}^n k(n+1-k)$$

$$2. S_2 = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$$

$$3. S_3 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$$

$$5. S_5 = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2} \right)$$

$$7. S_7 = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2$$

Exercice 5 : Sommes doubles.

Calculer les sommes suivantes (suivant les cas n appartient à $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$) :

$$1. S_1 = \sum_{i=0}^n \sum_{k=1}^n \frac{i}{k+1}$$

$$2. S_2 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} ij$$

$$3. S_3 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \min(i, j)$$

$$4. S_4 = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (i+j)$$

Exercice 6 :

Pour $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \sum_{k=1}^n ka^k$

1. Calculer S_n lorsque $a = 1$.

2. Lorsque $a \neq 1$, calculer $aS_n - S_n$ et en déduire la valeur de S_n .

3. Lorsque $a \neq 1$, retrouver le résultat précédent en remarquant que $S_n = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k a^k$.

Exercice 14 :

Calculer les sommes suivantes (n appartient à $\mathbb{N}$) :

$$1. S_1' = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} \text{ et } S_1'' = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1}$$

$$2. S_2' = \sum_{0 \leq 2k \leq n} (-1)^k \binom{n}{2k} \text{ et } S_2'' = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} (-1)^k \binom{n}{2k+1}$$

$$3. S_3 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(k\theta) \text{ avec } \theta \in \mathbb{R}$$