Semaine de colles n°6 du 10/11/25 au 14/11/25

DU PROGRAMME PRÉCÉDENT :

• Calcul de sommes et de produits

I – Le symbole Σ

- Notation Σ pour les sommes
- Règles de calcul : termes constants, facteur constant, changement d'indice, symétrie, sommes télescopiques.
- Séparation des termes pairs et impairs
- Sommes classiques : $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$ **(*)** et $\sum_{k=1}^{n} k^3$.
- Sommes de type géométrique. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![0, n]\!]$. On a : $\sum_{k=p}^{n} q^k = \begin{cases} q^p \dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n-p+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$
- Formule de Bernoulli : $\forall\ (x, y) \in \mathbb{C}^2, \forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ x^n - y^n = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$
- Cas des sommes doubles, Sommes triangulaires : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*, \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} x_{i,j} = \sum_{1\leq j\leq i\leq n} x_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} x_{i,j}$

II – Le symbole Π

- Notation Π pour les produits
- Règles de calcul, produits télescopiques.

III – Formule du binôme de Newton et applications à la trigonométrie

- Définition de n !, de $\binom{n}{k}$, valeurs particulières, symétrie et Si $1 \leq k \leq n$, on a : $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.
- Formule du triangle de Pascal et formule du binôme de Newton.
- Application à la trigonométrie :

Pour transformer des produits de $\cos^p x$ et $\sin^q x$, avec $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, en somme de $\cos(kx)$ et $\sin(lx)$ où $(k, l) \in \mathbb{N}^2$:

Utiliser les formules d'Euler puis appliquer la formule du binôme de Newton.

Pour exprimer $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$, avec n entier, en fonction de $\sin x$ et $\cos x$:

On a : $\cos(nx) = \mathrm{Re}(e^{inx}) = \mathrm{Re}(\ (\cos x + i \sin x)^n\ )$ et $\sin(nx) = \mathrm{Im}(e^{inx}) = ..$ d'après la formule de De Moivre

Ensuite, on utilise la formule du binôme de Newton.

NOUVEAU COURS :

• Compléments sur la décomposition en éléments simples d'une fonction rationnelle

⚠ Aucune théorie sur la décomposition en éléments simples n'est au programme… par contre, il faut savoir décomposer, sans aide, en éléments simples une fraction rationnelle simple.
Conformément au programme : « Dans le cas où le dénominateur possède une racine multiple ou un facteur irréductible de degré 2, la forme cherchée doit être fournie »

• Calcul de primitives et d'intégrales

Ce chapitre n'a pas pour but de permettre de résoudre des exercices théoriques d'intégration.

I – Rappels et compléments

- Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle borné, relation de Chasles, linéarité, positivité et ordre.
- Lien entre primitives et intégrales.

II – Quelques méthodes de calcul

- Primitives usuelles (en lisant le tableau des dérivées « à l'envers »)
- Transformations judicieuses d'expressions / reconnaitre des dérivées de fonctions composées

Ex. calcul de $\int_0^{\pi/4} \tan t\ dt$, $\int_0^{\pi/4} \tan^2 t\ dt$, $\int_1^{e} \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$, $\int_0^{\pi} \sin(2t)e^{\sin^2 t}\ dt$, $\int_{-2}^{2} \sqrt{t+2}\ dt$, $\int_1^2 \frac{x}{(x^2+1)^3} dt$

- Primitives de fonctions de la forme : $x \longmapsto \cos^p x \sin^q x$

Rq. Si p ou q est impair, on peut faire apparaitre des termes de la forme « $u'(x) \times (u(x))^n$ »

- 2 méthodes pour déterminer une primitive de $x \longmapsto \cos(\omega x)e^{\lambda x}$ ou $x \longmapsto \sin(\omega x)e^{\lambda x}$

En utilisant que $\cos(\omega x)e^{\lambda x} = \mathrm{Re}(e^{(\lambda + i\omega)x})$

Ou en cherchant une primitive sous la forme $x \longmapsto (A\cos(\omega x) + B \sin(\omega x))\, e^{\lambda x}$

Une question de cours pourra être le calcul d'une primitive d'une fonction de cette forme. **(*)**

- Primitives de fonctions rationnelles :

Primitives de $x \longmapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$ dans le cas de pôle simple / pôle double. **(*)** (sur un exemple)

Ex. Primitives de $x \longmapsto \frac{1}{1-x^2}$ sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

III – Formule d'intégration par parties

- Intégration par parties pour les fonctions de **classe C^1**, application au calcul de primitives.

Ex. Primitives de ln sur $\mathbb{R}^{+*}$ **(*)**

IV – Changement de variable

- Changement de variable : application aux calculs d'intégrales et de primitives
- Un changement de variable à connaitre pour les fonctions en sin, cos et tan : $t = \tan \frac{x}{2}$.

Ex. Sur $]\,0, \pi\,[$, une primitive de $x \longmapsto \frac{1}{\sin x}$ est $x \longmapsto \ln\left|\tan \frac{x}{2}\right|$ **(*)**

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n°7 : EDL

Déroulement d'une colle

1. Une question de cours parmi celles signalées par (*).
2. Primitive/intégrale (sans IPP ni changement de variable mais petites transformations d'expressions, reconnaitre la dérivé d'une composée, décomposition en éléments simples, …)
3. Exercice(s)

Un cours non connu entraine une note < 10.

Semaine de colles n°6 du 10/11/25 au 14/11/25 - Exercices à savoir refaire

Exercices Chap. 5

Exercice 4 : Calculer les sommes suivantes (suivant les cas n appartient à $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$) :

1. $S_1 = \sum_{k=1}^{n} k(n+1-k)$ **2.** $S_2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$ **3.** $S_3 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

5. $S_5 = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right)$ **7.** $S_7 = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2$

Exercice 5 : *Sommes doubles.*
Calculer les sommes suivantes (suivant les cas n appartient à $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$) :

1. $S_1 = \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=i}^{n} \frac{i}{k+1}$ **2.** $S_2 = \sum_{1 \le i, j \le n} ij$ **3.** $S_3 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \min(i, j)$ **4.** $S_4 = \sum_{1 \le i \le j \le n} (i+j)$

Exercice 6 :

Pour $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \sum_{k=1}^{n} k a^k$

1. Calculer S_n lorsque $a = 1$.
2. Lorsque $a \neq 1$, calculer $a\,S_n - S_n$ et en déduire la valeur de S_n.
3. Lorsque $a \neq 1$, retrouver le résultat précédent en remarquant que $S_n = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} a^k$.

Exercice 12 :
Calculer les produits suivants : (suivant les cas n appartient à $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$) :

a. $P_1 = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$ **b.** $P_2 = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$ **c.** $P_3 = \prod_{k=0}^{n} 2^k 3^{-k}$ **d.** $P_4 = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k+3}{2k-1}$

Exercice 13 :

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose : $P(x) = \prod_{k=0}^{n} \cos(2^k x)$.

1. Calculer $P(x)$ dans le cas où $x \equiv 0\ [\pi]$.
2. Pour $x \notin \pi\mathbb{Z}$, simplifier $\sin(x)P(x)$ et déterminer $P(x)$.

Exercice 14 :
Calculer les sommes suivantes (n appartient à $\mathbb{N}$) :

1. $S_1' = \sum_{0 \le 2k \le n} \binom{n}{2k}$ et $S_1'' = \sum_{0 \le 2k+1 \le n} \binom{n}{2k+1}$

2. $S_2' = \sum_{0 \le 2k \le n} (-1)^k \binom{n}{2k}$ et $S_2'' = \sum_{0 \le 2k+1 \le n} (-1)^k \binom{n}{2k+1}$

3. $S_3 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta)$ avec $\theta \in \mathbb{R}$

Exercice 17 :

1. Soit n et p deux entiers naturels tels que $1 \le p \le n$. Montrer que : $p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$ ⚠ Formule à connaître

2. Calculer les sommes suivantes : $S = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$, $S' = \sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}$ et $S'' = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{1+k}\binom{n}{k}$.

Exercice 18 :
1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f : x \longmapsto (x+1)^n$. Développer l'expression de $f(x)$, de $f'(x)$ et de $f''(x)$.

2. En déduire les valeurs de : $S = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$ et $S' = \sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}$.

3. Calculer : $S'' = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.

Exercices Chap. 6

⚠ Pas de liste d'exercices à savoir refaire pour ce chapitre :
Il faut savoir calculer des intégrales et primitives

À vous de vous entrainer sur les exos de la feuille de TD (déjà faits ou dont vous avez eu la correction).
Pensez aussi à la feuille de calculs !